61. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Pro libovolná reálná čísla x, y, z taková, že $x < y < z$, dokažte nerovnost

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

2. Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách?

3. Nechť E je střed strany CD rovnoběžníku $ABCD$, ve kterém platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokažte, že pokud lze do čtyřúhelníku $ABCE$ vepsat kružnici, dotýká se tato kružnice strany BC v jejím středu.

4. Na tabuli je napsáno prvních n celých kladných čísel. Markéta a Tereza se střídají v tazích při následující hře. Nejprve Markéta smaže jedno z čísel na tabuli. Dále vždy hráčka, která je na tahu, smaže jedno z čísel, které se od předchozího smazaného čísla ani neliší o 1, ani s ním není soudělné. Hráčka, která je na tahu a nemůže již žádné číslo smazat, prohrává. Pro $n = 6$ a pro $n = 12$ rozhodněte, která z hráček může hrát tak, že vyhraje nezávisle na tazích druhé hráčky.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 17. dubna 2012

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

61. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Abychom mohli uplatnit vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, převeďme nejprve jeden z krajních členů levé strany, například člen z^2, na pravou stranu:

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2,\\
(x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z),\\
(x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z).
\end{aligned}
$$

Protože společný činitel $x - y$ obou stran poslední nerovnosti je dle předpokladu úlohy číslo záporné, budeme s důkazem hotovi, když ukážeme, že zbylí činitelé splňují opačnou nerovnost $x + y < x - y + 2z$. Ta je však zřejmě ekvivalentní s nerovností $2y < 2z$ neboli $y < z$, která podle zadání úlohy skutečně platí.

Jiné řešení. Podle vzorce pro druhou mocninu trojčlenu platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravé strany dokazované nerovnosti a proveďme několik dalších ekvivalentních úprav:

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz,\\
0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz,\\
0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y),\\
0 &> 2(y - x)(y - z).
\end{aligned}
$$

Poslední nerovnost již plyne z předpokladů úlohy, podle kterých je činitel $y - x$ kladný, zatímco činitel $y - z$ je záporný.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za pouhé ověřování nerovnosti pro konkrétní trojice čísel $x < y < z$ žádný bod neudělujte.

2. Označme $\overline{abc}$ to trojmístné číslo, o jehož trojnásobku se píše v textu úlohy. Platí tak rovnice

$$3\overline{abc} + 6 = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}.$$

Protože na pravé straně je každá z číslic a, b, c dvakrát na místě jednotek, desítek i stovek, můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$300a + 30b + 3c + 6 = 222a + 222b + 222c \quad \text{neboli} \quad 78a + 6 = 192b + 219c.$$

Po vydělení číslem 3 dostaneme rovnici $26a + 2 = 64b + 73c$, z níž vidíme, že c je sudá číslice. Platí proto $c \geqq 2$, což spolu se zřejmou nerovností $b \geqq 1$ (připomínáme, že všechny tři neznámé číslice jsou dle zadání nenulové) vede k odhadu

$$64b + 73c \geqq 64 + 146 = 210.$$

Musí proto platit $26a + 2 \geqq 210$, odkud $a \geqq (210 - 2) : 26 = 8$, takže číslice a je buď 8, nebo 9. Pro $a = 8$ ovšem v nerovnosti z předchozí věty nastane rovnost, takže je nutně $b = 1$ a $c = 2$ (a rovnice za zadání úlohy je pak splněna). Pro $a = 9$ dostáváme rovnici

$$64b + 73c = 26 \cdot 9 + 2 = 236,$$

ze které plyne, že c je jednak dělitelné čtyřmi, jednak je menší než 4, což nemůže současně nastat.

Odpověď: Číslice na kartičkách jsou 8, 2 a 1.

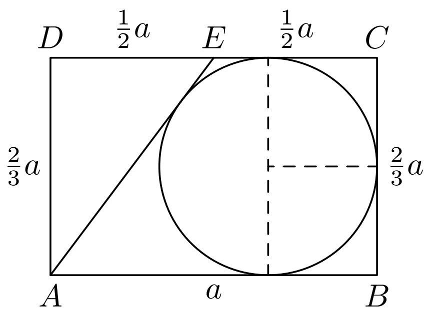
Poznámka. Řešit odvozenou rovnici $26a + 2 = 64b + 73c$ pro neznámé (nenulové a navzájem různé) číslice a, b, c lze více úplnými a systematickými postupy, uvedli jsme pouze jeden z nich.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho nejvýše 3 body za správně sestavenou rovnici, rozvinutí dekadických zápisů čísel a úpravu na lineární rovnici s neznámými a, b, c. Dalšími nejvýše 3 body pak ohodnoťte postup při hledání řešení odvozené rovnice, přitom za pouhé uhodnutí hledané trojice udělte 1 bod.

3. Protože čtyřúhelník $ABCE$ je podle zadání tečnový, pro délky jeho stran platí známá rovnost[1]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V naší situaci při označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 1), odkud po dosazení do uvedené rovnosti zjistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$.



Obr. 1

Nyní si všimneme, že pro délky stran trojúhelníku ADE platí

$$|AD| : |DE| : |AE| = \tfrac{2}{3}a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

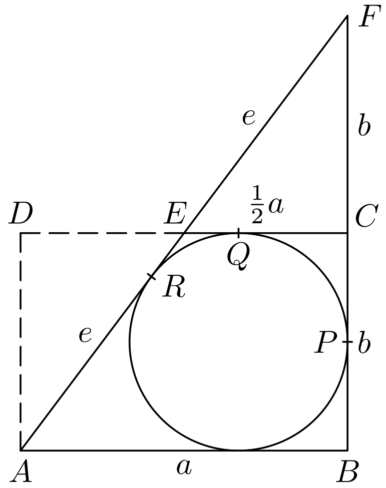
takže podle (obrácené části) Pythagorovy věty má trojúhelník ADE pravý úhel při vrcholu D, a tudíž rovnoběžník $ABCD$ je obdélník. Tečna BC kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCE$ je tedy kolmá ke dvěma jejím (navzájem rovnoběžným) tečnám AB a CE. To už zřejmě znamená, že bod dotyku tečny BC je středem úsečky BC (plyne to ze zjištěné kolmosti vyznačeného průměru kružnice k jejímu vyznačenému poloměru).

Jiné řešení. Ukážeme, že požadované tvrzení lze dokázat i bez povšimnutí, že rovnoběžník $ABCD$ je v dané úloze obdélníkem. Místo toho využijeme, že úsečka CE

---

[1] Rovnost se odvodí rozepsáním délek stran na jejich úseky vymezené body dotyku vepsané kružnice a následným využitím toho, že každé dva z těchto úseků, které vycházejí ze stejného vrcholu čtyřúhelníku, jsou shodné.

je střední příčkou trojúhelníku ABF, kde F je průsečík polopřímek BC a AE (obr. 2), neboť $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme proto $a = |AB| = 2|CE|$, $b = |BC| = |CF|$



Obr. 2

a $e = |AE| = |EF|$ (rovnost $2a = 3b$ uplatníme až v pravý čas). Stejně jako v původním řešení využijeme rovnost $b + e = a + \frac{1}{2}a\ \bigl(= \frac{3}{2}a\bigr)$, jež platí pro délky stran tečnového čtyřúhelníku $ABCE$. Kružnice jemu vepsaná se dotýká stran BC, CE, AE po řadě v bodech P, Q, R tak, že platí rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a také} \quad |FP| = |FR|.$$

Pro součet shodných délek $|FP|$ a $|FR|$ tudíž platí

$$\begin{aligned} |FP| + |FR| &= (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) = \\ &= \tfrac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a = 2a, \end{aligned}$$

což znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teď už řešení úlohy snadno dokončíme. Rovnost $|BP| = \frac{1}{2}b$, kterou máme v naší situaci dokázat, plyne z rovnosti

$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

když do ní dosadíme zadaný vztah $a = \frac{3}{2}b$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za užití kritéria tečnovosti čtyřúhelníku $ABCE$ k vyjádření délky strany AE.

4. Role dvou po sobě mazaných čísel je v zadané hře symetrická: je-li po čísle x možno smazat číslo y, je (při jiném průběhu hry) po čísle y možno smazat číslo x. Proto si můžeme celou hru (se zadaným číslem n) „zpřehlednit“ tak, že předem vypíšeme všechny takové (říkejme jim *přípustné*) dvojice (x, y). Protože na pořadí čísel v přípustné dvojici nezáleží, stačí vypisovat jen ty dvojice (x, y), v nichž $x < y$.

V případě $n = 6$ všechny přípustné dvojice jsou

$$(1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\ (2,5),\ (3,5).$$

Z tohoto výčtu snadno usoudíme, že vítěznou strategii má (první) hráčka Markéta. Smaže-li totiž na počátku hry číslo 4, musí Tereza smazat číslo 1, a když pak Markéta smaže číslo 6, nemůže již Tereza žádné další číslo smazat. Kromě tohoto průběhu $4 \to \to 1 \to 6$ si může Markéta zajistit vítězství i jinými, pro Terezu „vynucenými“ průběhy, například $6 \to 1 \to 4$ nebo $4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2$.

V případě $n = 12$ je všech přípustných dvojic výrazně větší množství. Proto si položíme otázku, zda všechna čísla od 1 do 12 nelze rozdělit do šesti přípustných dvojic. Najdeme-li totiž takovou šestici, můžeme popsat vítěznou strategii druhé hráčky (Terezy): smaže-li Markéta při jakémkoliv svém tahu číslo x, Tereza pak vždy smaže to číslo y, které s číslem x tvoří jednu z šesti nalezených dvojic. Tak nakonec Tereza smaže i poslední (dvanácté) číslo a vyhraje.

Hledané rozdělení všech 12 čísel do šesti dvojic skutečně existuje, například

$$(1,4),\ (2,9),\ (3,8),\ (5,12),\ (6,11),\ (7,10).$$

Jiné vyhovující rozdělení dostaneme, když v předchozím dvojice $(1,4)$ a $(6,11)$ zaměníme dvojicemi $(1,6)$ a $(4,11)$. Další, méně podobné vyhovující rozdělení je například

$$(1,6),\ (2,5),\ (3,10),\ (4,9),\ (7,12),\ (8,11).$$

Odpověď: Pro $n = 6$ má vítěznou strategii Markéta, pro $n = 12$ Tereza.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vyřešení případu $n = 6$ a 4 body za vyřešení případu $n = 12$.