61. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$

2. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Na kolmicích k přímce AB, které procházejí vrcholy A a B, jsou v polorovině opačné k polorovině ABC zvoleny po řadě body D a E, pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Označme dále R střed úsečky DE. Dokažte, že platí nerovnost $|RF| \geqq |CF|$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.

3. V jistém městě mají vybudovanou souvislou síť na šíření pomluv (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). V ní si každý pomlouvač vyměňuje informace se dvěma pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Předpokládejme, že ve zmíněné síti se najde takový muž i taková žena, že po případném úmrtí kterékoli z těchto dvou osob přestane být síť souvislou. Najděte nejmenší možný počet členů této sítě.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 26. ledna 2012

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

61. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Vynásobením obou stran dané rovnice čtyřmi dostaneme

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y = 16.$$

Výraz na levé straně takto upravené rovnice doplníme na součet druhých mocnin dvou dvojčlenů. Obdržíme tak

$$(4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 18.$$

Stačí tedy vyšetřit všechny rozklady čísla 18 na součet dvou kladných lichých čísel, neboť čísla $2x + 1$ a $2y + 1$ nejsou dělitelná dvěma (a nerovnají se tedy ani nule) pro žádná celá x a y.

Uvažujme proto následující rozklady:

$$18 = 1 + 17 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 9 + 9.$$

Mezi uvedenými součty je pouze jeden ($18 = 9 + 9$) součtem druhých mocnin dvou celých čísel. Mohou tedy nastat následující čtyři případy:

$$\begin{aligned}
&2x + 1 = 3, && 2y + 1 = 3, && \text{tj. } x = 1, && y = 1,\\
&2x + 1 = 3, && 2y + 1 = -3, && \text{tj. } x = 1, && y = -2,\\
&2x + 1 = -3, && 2y + 1 = 3, && \text{tj. } x = -2, && y = 1,\\
&2x + 1 = -3, && 2y + 1 = -3, && \text{tj. } x = -2, && y = -2.
\end{aligned}$$

Závěr. Dané rovnici vyhovují právě čtyři dvojice celých čísel (x, y), a to $(1, 1)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$ a $(-2, -2)$.

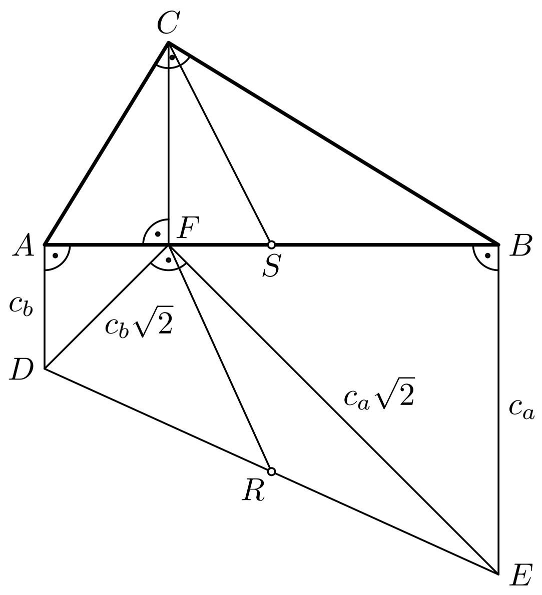
Jiné řešení. Danou rovnici lze upravit na tvar $x(x + 1) + y(y + 1) = 4$, z něhož je patrné, že číslo 4 je nutno rozložit na součet dvou celých čísel, z nichž každé je součinem dvou po sobě jdoucích celých čísel. Protože nejmenší hodnoty výrazu $t(t+1)$ pro kladná i záporná celá t jsou $0, 2, 6, 12, \ldots$, připadá v úvahu pouze rozklad $4 = 2 + 2$, takže každá z neznámých x, y se rovná jednomu z čísel 1 či -2, jediných celých čísel t, pro něž $t(t + 1) = 2$. Navíc je jasné, že naopak každá že čtyř dvojic (x, y) sestavených z čísel 1, -2 je řešením dané úlohy.

Za systematické a úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhad řešení $(1, 1)$ neudělujte žádný bod, za další jedno uhodnuté řešení udělte 1 bod, za všechna uhodnutá řešení 2 body. Při správném postupu naopak strhněte 1 bod za každé chybějící řešení. Jednoznačnost rozkladu čísla 18 na součet dvou druhých mocnin je natolik zřejmá, že ji není nutné zdůvodňovat (jak je uvedeno v původním řešení).

2. Protože DAF a EBF jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, mají úhly při jejich přeponách velikost $45°$, takže trojúhelník DEF je pravoúhlý. Označme S střed úsečky AB (obr. 1). Protože střed přepony pravoúhlého trojúhelníku je zároveň středem jeho opsané kružnice, zřejmě platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$ a $|CS| = \frac{1}{2}|AB|$. AD a BE jsou dvě rovnoběžné přímky, jejichž vzdálenost je rovna $|AB|$, a proto $|DE| \geqq |AB|$. Platí tedy

$$|RF| = \frac{1}{2}|DE| \geqq \frac{1}{2}|AB| = |CS| \geqq |CF|,$$

což jsme chtěli dokázat.



Obr. 1

Rovnost nastane, právě když $|DE| = |AB|$ a $|CS| = |CF|$, tedy právě když $S = F$ (pak je i $|AD| = |AS| = |BS| = |BE|$ a $|DE| = |AB|$) neboli právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Označme $c_a = |BF|$ a $c_b = |AF|$. Vzhledem k tomu, že $|AD| = c_b$ a $|BE| = c_a$ (obr. 1), vidíme, že pro délku přepony DE v pravoúhlém trojúhelníku DEF (viz řešení 2. úlohy domácího kola) dostaneme použitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro dvojici kladných čísel c_a^2 a c_b^2 a dále Eukleidovy věty o výšce CF v pravoúhlém trojúhelníku ABC odhad

$$|DE| = \sqrt{2(c_a^2 + c_b^2)} \geqq \sqrt{2 \cdot 2c_a c_b} = 2\sqrt{c_a c_b} = 2\,|CF|.$$

Protože v pravoúhlém trojúhelníku DEF platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$, dostáváme využitím uvedené nerovnosti

$$2\,|RF| = |DE| \geqq 2\,|CF| \quad \text{a odtud} \quad |RF| \geqq |CF|,$$

což jsme chtěli dokázat.

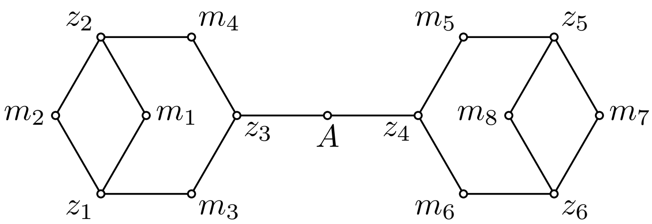
Rovnost nastane, právě když se obě průměrované hodnoty c_a^2 a c_b^2 rovnají, tj. když platí $c_a = c_b$, což nastane právě v případě pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za opomenutí podmínky, kdy nastane rovnost, strhněte 2 body. Za pouhé uhodnutí, kdy nastane rovnost, udělte 1 bod.

3. Označme A toho pomlouvače, po jehož smrti se síť rozpadne, a M_1, Z_1 počty pomlouvačů a pomlouvaček v jedné oddělené skupině, M_2 a Z_2 ve druhé. Protože v každé skupině existuje alespoň jedna pomlouvačka a ta je pořád ještě ve spojení s aspoň dvěma pomlouvači, je $M_1 \geqq 2$ a $M_2 \geqq 2$. V každé skupině mezi počty pomlouvaček a pomlouvačů platí nyní vztahy $3Z_1 - 1 = 2M_1$ a $3Z_2 - 1 = 2M_2$. Rovnice tvaru $3z - 1 = 2m$ nemá celočíselné řešení z ani pro $m = 2$, ani pro $m = 3$, teprve pro $m = 4$

vychází celé $z = 3$. Nejmenší možný počet členů sítě tak může být $M_1 = M_2 = 4$, $Z_1 = Z_2 = 3$.

Takovou síť snadno sestrojíme podle obr. 2, v němž z_i označují pomlouvačky a m_i pomlouvače.



Obr. 2

Zároveň vidíme, že uvedená síť se stane nesouvislou po smrti jedné z pomlouvaček z_3 či z_4. Nejmenší počet členů sítě s požadovanou vlastností je proto 15.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud bude nalezen jen minimální odhad $Z_1 = Z_2 = 3$, $M_1 = M_2 = 4$ a nebude uvedena konkrétní konfigurace, udělte 4 body. Pokud bude nalezena pouze konkrétní konfigurace a nebude dokázáno, že menší počet členů sítě nemůže existovat, udělte jen 2 body.