61. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Označme n součet všech desetimístných čísel, která mají ve svém dekadickém zápise každou z číslic $0, 1, \ldots, 9$. Zjistěte zbytek po dělení čísla n sedmdesáti sedmi.*

ŘEŠENÍ. Nejdříve zjistíme hodnotu čísla n, potom už jeho zbytek po dělení číslem 77 určíme snadno. V zadání popsaná desetimístná čísla nebudeme sčítat přímo. Hledaný součet snáze najdeme tak, že zjistíme, kolikrát se která číslice nalézá ve všech sčítancích na místě jednotek, desítek, stovek atd. Následně určíme, jaký je „příspěvek“ každé číslice do celkového součtu n.

Jestliže je číslice 1 na místě jednotek, potom na zbylých devět míst můžeme zbylých devět číslic rozmístit libovolně, jen na první místo nesmíme dát číslici 0. Na první místo tedy můžeme dát některou z osmi různých číslic (každou kromě 0), následně na druhé místo některou z osmi různých číslic (každou kromě té, již jsme dali na první místo), na třetí místo některou ze sedmi různých číslic (každou kromě číslic na prvních dvou místech) atd. Číslice 1 se proto na místě jednotek nalézá $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 8!$ krát.[1]

Stejnou úvahou zjistíme, že číslice 1 se nalézá $8 \cdot 8!$ krát i na místě desítek, stovek, tisíců atd. Jen na první pozici se nalézá až $9!$ krát, protože tehdy na zbylých devět míst můžeme zbylých devět číslic rozmístit libovolně – nemáme omezení pro číslici 0.

Příspěvek číslice 1 do celkového součtu je tedy

$$8 \cdot 8! + 8 \cdot 8! \cdot 10 + 8 \cdot 8! \cdot 100 + \ldots + 8 \cdot 8! \cdot 10^8 + 9! \cdot 10^9 =$$
$$= 8 \cdot 8! \cdot 111\,111\,111 + 9 \cdot 8! \cdot 10^9 = 8! \cdot 9\,888\,888\,888.$$

Číslice 2 se zřejmě nalézá ve všech sčítancích na jednotlivých místech stejněkrát jako číslice 1, takže její příspěvek do celkového součtu je dvojnásobný. Příspěvek číslice 3 je trojnásobný, příspěvek číslice 4 čtyřnásobný atd. Počet výskytů číslice 0 na jednotlivých místech je sice jiný než u ostatních číslic, ale zjišťovat ho nemusíme, protože příspěvek číslice 0 do součtu je nulový. Dohromady tak máme

$$n = 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888. \qquad (1)$$

Hledaný zbytek bychom mohli už nyní určit vyčíslením hodnoty n a vydělením číslem 77. My se však vyhneme zdlouhavému násobení a dělení velkých čísel. Z vyjádření (1) vidíme, že n je dělitelné sedmi (protože činitel $8!$ je násobek sedmi). Protože $77 = 7 \cdot 11$, musí být násobkem sedmi i zbytek čísla n při dělení sedmdesáti sedmi.

Ještě určíme zbytek čísla n po dělení jedenácti. Triviálně platí $45 \equiv 1 \pmod{11}$ a snadno vypočítáme, že $8! = 40\,320 \equiv 5 \pmod{11}$. Určení zbytku čísla $9\,888\,888\,888$ můžeme urychlit známým tvrzením: Číslo s dekadickým zápisem $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ dává při dělení jedenácti stejný zbytek jako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^k a_k$. Dostáváme tak

$$9\,888\,888\,888 \equiv 8 - 8 + 8 - 8 + \ldots + 8 - 9 = -1 \equiv 10 \pmod{11}.$$

[1] Ke stejnému výsledku bychom dospěli i jinou úvahou: Jestliže bychom číslici 0 připustili i na první pozici, všech čísel by bylo $9!$. Nevyhovujících čísel s nulou na počátku je $8!$. Vyhovujících čísel je tedy $9! - 8! = 9 \cdot 8! - 8! = 8 \cdot 8!$.

Celkově tedy vychází

$$n = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \equiv 1 \cdot 5 \cdot 10 = 50 \equiv 6 \pmod{11}$$

(využili jsme to, že součin činitelů dává stejný zbytek jako součin jejich zbytků).

Zbytkem při dělení čísla n sedmdesáti sedmi je tedy číslo z množiny $\{6, 17, 28, 39, 50, 61, 72\}$, které je dělitelné sedmi, tedy číslo 28.

Jiné řešení. Připusťme, že na prvním místě zápisu čísel může být i nula. Potom mezi všemi čísly, která mají ve svém desítkovém zápise každou z číslic 0, 1, …, 9, se každá číslice vyskytuje na každém z deseti míst $9!$ krát. Proto je součet všech takových čísel

$$s_1 = 9!(0+1+2+\ldots+9)(1+10+\ldots+10^9) = 9! \cdot 45 \cdot \frac{10^{10}-1}{9} = 9! \cdot 5 \cdot (10^{10}-1).$$

Musíme však odečíst součet těch (navíc započítaných) desetimístných čísel, která začínají nulou. To jsou vlastně všechna devítimístná čísla, jež mají ve svém desítkovém zápise každou z číslic 1, 2, …, 9. Analogicky jako předtím odvodíme, že jejich součet je

$$s_2 = 8!(1+2+\ldots+9)(1+10+\ldots+10^8) = 8! \cdot 45 \cdot \frac{10^9-1}{9} = 8! \cdot 5 \cdot (10^9-1).$$

Zřejmě $7 \mid s_1$ a $7 \mid s_2$, takže i $7 \mid s_1 - s_2 = n$. Navíc díky známému rozkladu víme, že čísla $10^{2k+1}+1 = (10+1)(10^{2k}-10^{2k-1}+\ldots-10+1)$ jsou dělitelná jedenácti, proto

$$\begin{aligned} s_1 &= 9! \cdot 5(10^5-1)(10^5+1) \equiv 9! \cdot 5(10^5-1) \cdot 0 \equiv 0 \pmod{11},\\ s_2 &= 8! \cdot 5 \cdot (10^9-1) = (8 \cdot 7) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot (10^9+1-2) \equiv\\ &\equiv 1 \cdot (-1) \cdot 30 \cdot (-2) \equiv 5 \pmod{11}, \end{aligned}$$

tedy $n = s_1 - s_2 = -5 \equiv 6 \pmod{11}$. Závěr je stejný jako v prvním řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete počet všech desetimístných čísel, která mají ve svém desítkovém zápise každou z číslic 0, 1, …, 9. [$10! - 9!$]

N2. Učitel si myslí číslo. Žákům prozradil, že jeho číslo končí číslicí 6 a dává při dělení třinácti zbytek 9. Určete, jaký zbytek dává učitelovo číslo při dělení číslem 65. [Učitelovo číslo n splňuje $n \equiv 1 \pmod 5$, $n \equiv 9 \pmod{13}$. Protože $65 = 5 \cdot 13$, musí být hledaný zbytek z množiny $\{9, 9+13, 9+26, 9+39, 9+52\}$. Z těchto čísel jedině $9 + 52 = 61$ dává správný zbytek při dělení pěti.]

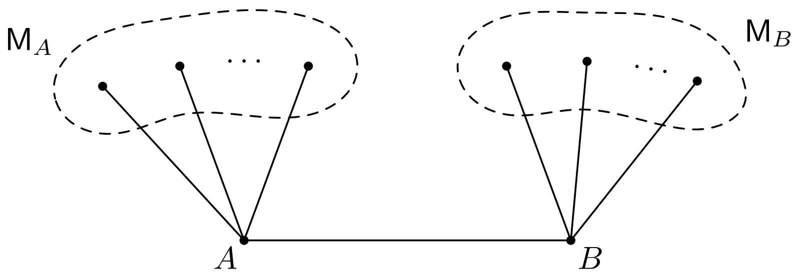
N3. Dokažte, že číslo s dekadickým zápisem $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ dává při dělení jedenácti stejný zbytek jako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^k a_k$. [Tvrzení plyne z toho, že $10 \equiv -1 \pmod{11}$, tudíž $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$.]

D1. Dokažte, že jestliže čísla a, b dávají při dělení číslem d postupně zbytky u, v, jsou zbytky čísel ab, uv při dělení číslem d stejné.

D2. Dokažte, že zbytky čísel 1, 10, 10^2, 10^3, … při dělení libovolným lichým prvočíslem různým od 5 tvoří periodickou posloupnost.

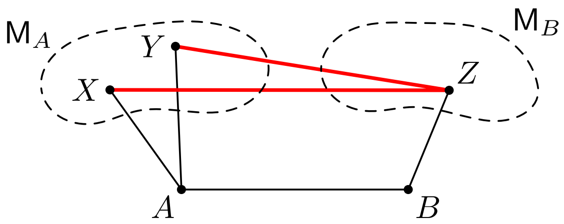
2. *Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě dva společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. Ukažte rovněž, že na setkání mohlo být právě šest osob.*

Řešení. Účastníky setkání budeme znázorňovat plnými kroužky a to, že se dva lidé znají, budeme znázorňovat spojením příslušných kroužků čarou.[2] Množinu známých účastníka A různých od B označme M_A a množinu známých účastníka B různých od A označme M_B (obr. 1). Podle zadání jsou množiny M_A, M_B disjunktní.

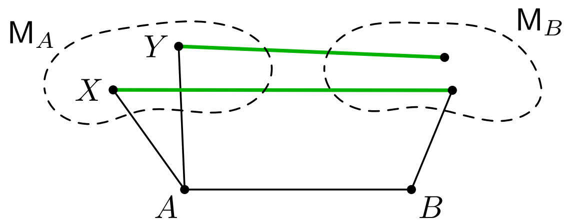


Obr. 1

Ani jeden člověk z M_A se nezná s B, neboť A a B nemají společného známého. Protože každý z M_A má s B právě dva společné známé, přičemž jedním z nich je A, nalézá se druhý mezi zbylými známými účastníka B, tedy v množině M_B. Přitom žádní dva lidé X, Y z M_A nemohou znát téhož člověka Z v M_B. V opačném případě by se totiž Z neznal s A (neboť A, B nemají společné známé) a zároveň by X, Y, B tvořili trojici jejich společných známých (obr. 2a), což je v rozporu se zadáním.



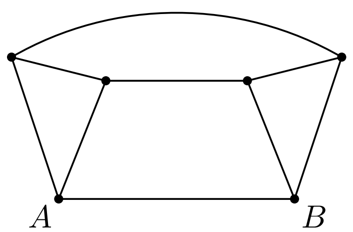
Obr. 2a



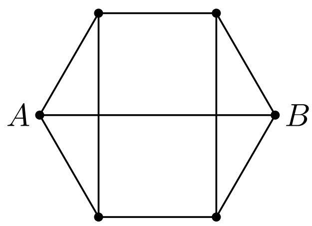
Obr. 2b

Shrňme ještě jednou poznatky odvozené v předchozím odstavci: Každý člověk z M_A zná někoho z M_B a žádní dva lidé z M_A neznají téhož člověka v M_B (obr. 2b). Odtud plyne, že v množině M_B je aspoň tolik lidí jako v množině M_A. Stejnou úvahou ovšem dokážeme (výměnou rolí A a B), že v množině M_A je aspoň tolik lidí jako v množině M_B. Přátelé A a B mají tedy mezi přítomnými stejný počet známých.

V druhé části řešení už jen vymyslíme a znázorníme nějaké vyhovující rozložení známostí mezi šesticí osob, z nichž dvě jsou A a B, znají se a nemají společné známé. Z první části už víme, že tyto osoby musejí mít stejný počet známých. Stačí tedy například každého z dvojice známých A, B spojit s dvěma dalšími osobami a mezi takovouto čtveřicí osob dokreslit čáry tak, aby bylo splněno zadání. Objevíme tak vyhovující graf na obr. 3a (jeho ekvivalentní zobrazení je na obr. 3b).



Obr. 3a



Obr. 3b

[2] Takovému znázornění se říká *graf*; účastníci jsou *vrcholy* a známosti jsou *hrany* grafu.

Jiné řešení. Nechť M_A, M_B jsou tytéž množiny jako v prvním řešení. Budeme používat pojmy z teorie grafů. Nechť M_A obsahuje m vrcholů a M_B obsahuje n vrcholů. Protože každý vrchol z M_A má s B společného známého A a zároveň není známým vrcholu B, musí mít s B právě jednoho známého v M_B (aby byla splněna podmínka ze zadání, že mají právě dva společné známé). Proto z každého vrcholu v M_A vychází právě jedna hrana do M_B. Dohromady tudíž vychází z M_A do M_B právě m hran. Analogicky z M_B vychází do M_A právě n hran. Jsou to však tytéž hrany, takže nutně $m = n$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě *jednoho* společného známého. Nikdo se neznal se všemi. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že na setkání byla osoba, která neznala A ani B. [Kdyby A neměl kromě B žádného známého, musel by každý znát B, což nevyhovuje zadání. Proto A má kromě B aspoň jednoho známého X. Podobně B má kromě A známého Y. Přitom X a Y se nemohou znát, proto musejí mít společného známého Z, kterého nezná A ani B.]

D1. Dokažte, že rozložení na obr. 3a je jediné vyhovující rozložení se šesti osobami.

D2. Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě *tři* společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. [Označme M_A množinu známých účastníka A různých od B a M_B množinu známých účastníka B různých od A, $m = |\mathsf{M}_A|$, $n = |\mathsf{M}_B|$. Zřejmě z každého vrcholu M_A vycházejí právě dvě hrany do M_B a obráceně, z každého vrcholu M_B vycházejí právě dvě hrany do M_A, takže $2m = 2n$ neboli $m = n$.]

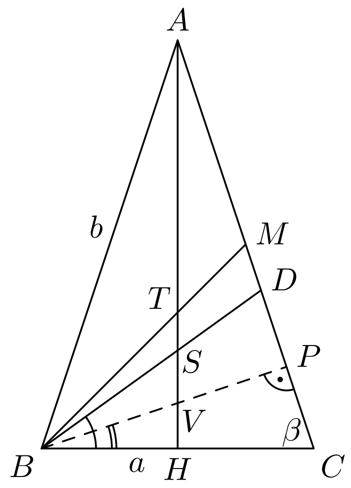
D3. Ve skupině n žáků se někteří kamarádí. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit na dvě nejvýše čtyřčlenné skupiny tak, aby každý měl ve své skupině aspoň jednoho kamaráda. a) Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem vždy rozdělit. b) Zjistěte, zda lze žáky vždy takto rozdělit i v případě $n = 8$. [60–C–I–4]

3. *Označme S střed kružnice vepsané, T těžiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.*

a) Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV.

b) Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV.

Řešení. Označme vrcholy daného trojúhelníku písmeny A, B, C tak, aby BC byla jeho základna. Velikosti stran a úhlů trojúhelníku budeme označovat standardním způsobem, tj. $|BC| = a$, $|AC| = |AB| = b$, $\beta = \gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Nechť H je střed základny BC.



Obr. 4a

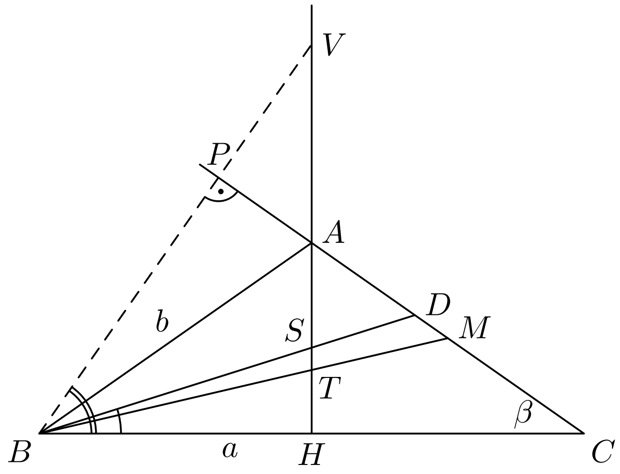
a) Veďme vrcholem B výšku, osu úhlu a těžnici trojúhelníku ABC a jejich průsečíky s přímkou CA označme postupně P, D a M. Všechny tři leží na polopřímce CA (body D, M dokonce na úsečce CA). Zřejmě stačí dokázat, že bod D je vnitřním bodem úsečky MP. Rozebereme dva případy.

Jestliže $b > a$ (obr. 4a), je zřejmě $\beta > 60^\circ$. Odtud máme

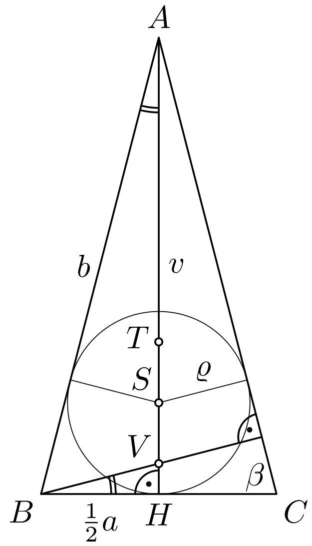
$$|\sphericalangle CBP| = 90^\circ - \beta < 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ < \tfrac{1}{2}\beta = |\sphericalangle CBD|,$$

takže $|CP| < |CD|$. Osa úhlu dělí stranu trojúhelníku v poměru přilehlých stran, proto $|CD|/|AD| = a/b < 1$, odkud $|CD| < \frac{1}{2}|CA| = |CM|$. Dohromady tedy $|CP| < |CD| < |CM|$, tedy bod D leží uvnitř úsečky MP.

Jestliže $a > b$ (obr. 4b), je $\beta < 60^\circ$ a analogicky dostáváme $|\sphericalangle CBP| = 90^\circ - \beta > 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ > \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle CBD|$, $|CD|/|AD| = a/b > 1$,



Obr. 4b



Obr. 5

takže $|CP| > |CD| > \frac{1}{2}|CA| = |CM|$, tedy i v tomto případě leží bod D uvnitř úsečky MP.

b) Nejdříve vyjádříme délky úseček TH, SH, VH pomocí délek stran trojúhelníku a pomocí délky v výšky AH (obr. 5), kterou ovšem dokážeme rovněž vyjádřit pomocí délek a, b, neboť z Pythagorovy věty v trojúhelníku ABH máme $v^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Těžiště T dělí těžnici AH v poměru $2 : 1$, takže $|TH| = \frac{1}{3}v$.

Úsečka SH je poloměrem ϱ vepsané kružnice a její délku vypočítáme ze známého vzorce $S_{ABC} = \varrho \cdot s$ pro obsah trojúhelníku ABC, kde s označuje polovinu jeho obvodu:

$$|SH| = \varrho = \frac{S_{ABC}}{s} = \frac{\frac{1}{2}av}{\frac{1}{2}(a+2b)} = \frac{av}{a+2b}.$$

Trojúhelníky BVH a ABH jsou podobné, protože jsou oba pravoúhlé a $|\sphericalangle VBH| = 90^\circ - \beta = \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle BAH|$. Pro příslušné délky stran proto máme $|VH| : |BH| = |BH| : |AH|$, odkud

$$|VH| = \frac{|BH|^2}{|AH|} = \frac{a^2}{4v}.$$

Protože body S, T, V leží na polopřímce HA, je rovnost $|TS| = |SV|$ ekvivalentní rovnosti

$$|TH| + |VH| = 2|SH|,$$

takže dosazením za jednotlivé délky a využitím vztahu pro výšku v postupně (ekvivalentními úpravami) dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}v + \frac{a^2}{4v} &= \frac{2av}{a+2b},\\
4v^2(a+2b) + 3a^2(a+2b) &= 24av^2,\\
3a^2(a+2b) &= 4v^2(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= 4(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= (2b+a)(2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= 12ab - 5a^2 - 4b^2,\\
2a^2 - 3ab + b^2 &= 0,\\
(2a-b)(a-b) &= 0.
\end{aligned}$$

Protože podle zadání je $a \neq b$, je bod S středem úsečky TV, právě když $2a = b$, tedy právě když je poměr délek stran vyšetřovaného trojúhelníku roven $1 : 2 : 2$.

Jiné řešení. a) Protože S, T, V jsou vnitřní body polopřímky HA (body S, T jsou dokonce vnitřní body úsečky HA), stačí ukázat, že rozdíly $|HS| - |HT|$ a $|HV| - |HS|$ jsou nenulové a mají oba stejné znaménko.

Bez újmy na obecnosti nechť $a = 2$, tj. $|BH| = |HC| = 1$. Z pravoúhlých trojúhelníků BSH, BAH a BVH dostáváme

$$|HS| = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad |HT| = \frac{|HA|}{3} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{3} \quad \text{a} \quad |HV| = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Díky vztahu $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ při označení $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ máme

$$|HS| - |HT| = t - \frac{2t}{3(1-t^2)} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)},$$
$$|HV| - |HS| = \frac{1-t^2}{2t} - t = \frac{1-3t^2}{2t}.$$

Protože β je ostrý úhel různý od 60°, platí $\frac{1}{2}\beta \in (0^\circ, 45^\circ)$ a $\frac{1}{2}\beta \neq 30^\circ$, odkud pro hodnotu $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ vyplývají vztahy $0 < t < 1$ a $3t^2 \neq 1$, takže oba zkoumané rozdíly jsou buď kladné (jestliže $\beta < 60^\circ$), anebo záporné (jestliže $\beta > 60^\circ$).

b) Podíl rozdílů z části a) má vyjádření

$$\frac{|HS| - |HT|}{|HV| - |HS|} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)} \cdot \frac{2t}{1-3t^2} = \frac{2t^2}{3(1-t^2)}.$$

Bod S je středem úsečky TV, právě když je uvedený podíl roven 1. Proto v oboru $(0, 1)$ řešíme rovnici

$$\frac{2t^2}{3(1-t^2)} = 1,$$

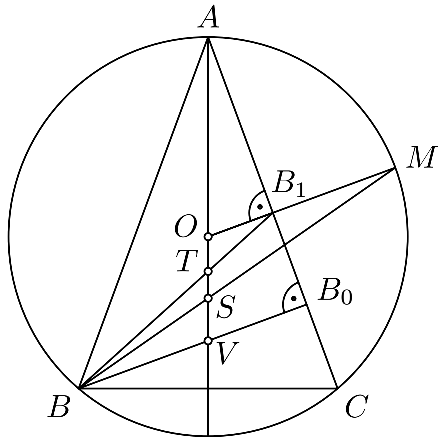
která tam zřejmě má jediný kořen

$$t = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \text{odkud} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2t}{1-t^2} = \sqrt{15}.$$

V trojúhelníku BHA tedy kromě $|BH| = 1$ platí $|HA| = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{15}$, takže podle Pythagorovy věty máme $|BA| = \sqrt{1+15} = 4$. Strany trojúhelníku ABC jsou proto v poměru $2 : 4 : 4$ neboli $1 : 2 : 2$.

Jiné řešení. a) Označme vrcholy daného trojúhelníku stejně jako v prvním řešení, dále O střed opsané kružnice, B_0 patu výšky z vrcholu B a B_1 střed strany AC. Protože osa úhlu při vrcholu B protíná oblouk CA opsané kružnice v jeho středu M (obr. 6), je zřejmé, že díky podmínce $O \neq V$ (jež je ekvivalentní s tím, že daný trojúhelník není rovnostranný) protne tato osa stranu AC uvnitř úsečky B_0B_1, a tudíž bod S leží uvnitř úsečky TV.

b) Využijeme známou vlastnost tří základních bodů trojúhelníku, těžiště T, středu O opsané kružnice a průsečíku V výšek. Uvedené tři body leží totiž v přímce v libovolném trojúhelníku, přičemž těžiště T vždy dělí úsečku OV v poměru $1 : 2$. Uvedená



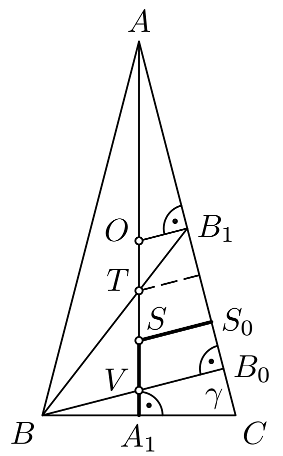
Obr. 6

vlastnost jednoduše plyne z toho, že trojúhelník $A_1B_1C_1$ tvořený středními příčkami daného trojúhelníku ABC je jeho obrazem ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $\frac{1}{2}$. A protože osa každé ze stran trojúhelníku ABC je zároveň výškou trojúhelníku $A_1B_1C_1$, je střed O kružnice opsané danému trojúhelníku ABC zároveň průsečíkem výšek trojúhelníku $A_1B_1C_1$, takže bod O je v uvedené stejnolehlosti obrazem bodu V a $|TO| = \frac{1}{2}|TV|$. Pokud tedy střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC půlí úsečku TV, dělí body T a S (v tomto pořadí) orientovanou úsečku OV na tři shodné části.

Pro kolmé průměty B_1, S_0 a B_0 bodů O, S a V na stranu AC (obr. 7) proto platí

$$CB_1 = CB_0 + 3(CS_0 - CB_0) = 3CS_0 - 2CB_0.$$

Budeme-li uvedenou rovnost chápat jako rovnost orientovaných úseček (nebo vektorů) na přímce CA, vyhneme se nutnosti rozlišovat, zda je úhel při vrcholu A větší či menší než 60°, protože jak už víme, na pořadí zmíněných bodů to nemá vliv.



Obr. 7

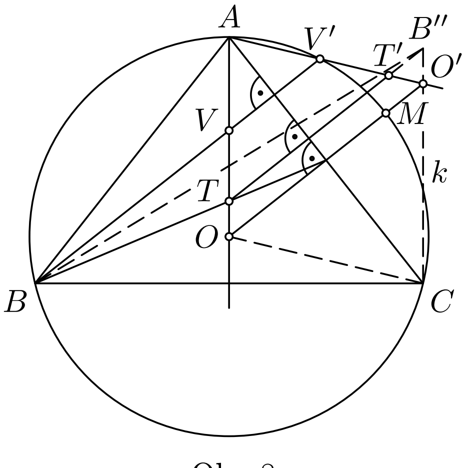
Do nalezené rovnosti teď můžeme dosadit $\frac{1}{2}b$ za CB_1, $\frac{1}{2}a$ za CS_0 ($|CS_0| = |CA_1|$ je délka úseků obou tečen z vrcholu C ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC) a konečně ze dvou podobných pravoúhlých trojúhelníků BCB_0 a ACA_1 (shodují se ve společném úhlu BCA) vychází $CB_0 = \frac{1}{2}a^2/b$. Dostáváme tak

$$\frac{b}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{b} \quad \text{neboli} \quad b^2 - 3ab + 2a^2 = 0.$$

Poslední rovnost lze přepsat jako $(b-a)(b-2a)=0$, a protože $a \neq b$, musí být $b=2a$.

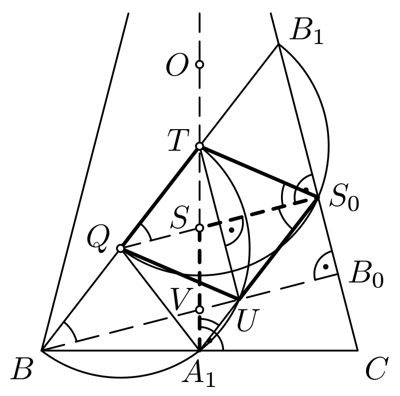
Jiné řešení. Část a) už nebudeme znovu dokazovat, použijeme stejný postup i označení jako v předchozím řešení.

b) Nejprve ukážeme, že v trojúhelníku, v němž je při vrcholu A úhel větší než $60°$, nemůže osa úhlu středem úsečky VT vůbec procházet. K tomu využijeme známou vlastnost průsečíku výšek: jeho obraz V' v osové souměrnosti podle strany AC leží na kružnici k trojúhelníku ABC opsané (obr. 8). Protože za uvedeného předpokladu leží body T a O (v tomto pořadí) na polopřímce AO až za bodem V, leží zřejmě obrazy T', O' bodů T, O v uvedené osové souměrnosti ve vnější oblasti kružnice k. V její vnější oblasti leží ovšem i obraz B'' vrcholu B ve středové souměrnosti podle středu úsečky VT: bod B'' je totiž průsečíkem polopřímek TT' a CO', protože CO' je zároveň kolmá na BC ($AOCO'$ je kosočtverec) a je tak obrazem přímky AO ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem 2. Úhlopříčka BB'' rovnoběžníku $BTB''V$ (na níž leží těžnice trojúhelníku BTV) proto určitě protne kružnici k uvnitř pásu rovnoběžek BV a TT'. Osa úhlu při vrcholu B však protíná kružnici k ve středu M příslušného oblouku AC a přímka OM leží vně zmíněného pásu.



Obr. 8

Předpokládejme tedy, že v daném trojúhelníku je při vrcholu A úhel menší než $60°$ a že střed S vepsané kružnice půlí úsečku VT. Označme Q střed úsečky BT, S_0 bod dotyku vepsané kružnice se stranou AC a U patu kolmice z bodu T na výšku BV (obr. 9). Úsečky TU a QS_0 jsou zřejmě příčky trojúhelníku BB_0B_1 rovnoběžné s odpovídajícími stranami B_1B_0 a BB_0 ve dvoutřetinové vzdálenosti od protějších vrcholů. Je tedy



Obr. 9

také $US_0 \parallel QT$ (body U, S_0 totiž dělí orientované úsečky BB_0, resp. B_1B_0 ve stejném poměru $2:1$), a protože bod S_0 leží zřejmě na Thaletově kružnici s průměrem QB_1 a zároveň bod U leží na Thaletově kružnici s průměrem BT, je QUS_0T kosočtverec. Trojúhelník A_1S_0S je rovnoramenný a z rovnosti obvodových úhlů příslušných tětivě TU kružnice s průměrem BT plyne $|\sphericalangle TA_1U| = |\sphericalangle TBU| = |\sphericalangle QS_0U|$. Kdyby body A_1, U a S_0 neležely v přímce, průsečík U ramen A_1U, S_0U shodných úhlů SA_1U, SS_0U by ležel na ose souměrnosti úsečky A_1S_0, takže trojúhelník A_1US_0 by byl rovnoramenný. Protože však tětivě A_1U přísluší obvodový úhel A_1BU, pro jehož velikost dle předpokladu platí $90° - \gamma < 30°$, je délka této tětivy menší než poloměr příslušné kružnice neboli $|A_1U| < |QT| = |US_0|$. Vzhledem k uvedenému rozporu musí body A_1, U a S_0 ležet v přímce, takže A_1S_0 je střední příčkou trojúhelníku BCB_1. Trojúhelník A_1S_0C je rovnoramenný, proto je rovnoramenný i trojúhelník BB_1C. Odtud okamžitě plyne, že $b = 2a$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že v každém trojúhelníku dělí osa úhlu protilehlou stranu v poměru stran přilehlých. [Jestliže D je průsečík strany CA a osy úhlu CBA, lze poměr q obsahů trojúhelníků BCD a BAD vyjádřit dvěma způsoby: $q = |BC| : |BA|$ (výšky z vrcholu D mají stejnou velikost) a zároveň $q = |CD| : |AD|$ (výšky z vrcholu B splývají).]

N2. V rovnoramenném trojúhelníku se základnou délky a a rameny délky b vyjádřete velikost poloměru ϱ vepsané kružnice. [$\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{4b^2 - a^2}/(a+2b) = \frac{1}{2}a\sqrt{(2b-a)/(2b+a)}$]

N3. Dokažte platnost součtového vzorce $\operatorname{tg}(x+y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)/(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$.

D1. Na odvěsnách délek a, b pravoúhlého trojúhelníku leží postupně středy dvou kružnic k_a, k_b. Obě kružnice se dotýkají přepony a procházejí vrcholem proti přeponě. Poloměry uvedených kružnic označme ϱ_a, ϱ_b. Určete největší kladné číslo p takové, že nerovnost

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big)$$

platí pro všechny pravoúhlé trojúhelníky. [58–A–II–2]

4. *Nechť p, q jsou dvě různá prvočísla, m, n přirozená čísla a součet*

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p}$$

je celé číslo. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{m}{q} + \frac{n}{p} > 1.$$

ŘEŠENÍ. Aby se dala lépe využít podmínka celočíselnosti, upravíme součet zlomků na tvar

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p} = \frac{p(mp-1) + q(nq-1)}{pq}.$$

Čitatel posledního zlomku je násobkem jeho jmenovatele, takže je dělitelný jak prvočíslem p, tak prvočíslem q. Protože první sčítanec čitatele je násobkem p, musí jím být i druhý sčítanec, tedy $p \mid q(nq-1)$. Z nesoudělnosti prvočísel p, q odtud dostáváme $p \mid nq - 1$. Podobně máme $q \mid p(mp-1)$, tedy $q \mid mp - 1$.

Přirozené číslo $mp + (nq-1)$ (které můžeme zapsat i ve tvaru $(mp-1) + nq$) je proto dělitelné jak číslem p, tak číslem q, a tedy (díky nesoudělnosti p, q) i součinem pq. Pro jeho velikost tudíž platí odhad

$$mp + nq - 1 \geqq pq, \quad \text{takže} \quad mp + nq > pq.$$

Po vydělení obou stran číslem pq dostaneme nerovnost, již jsme měli dokázat.

Poznámka. Klíčové tvrzení $pq \mid mp + nq - 1$ můžeme dokázat i jinak. Protože $p \mid nq - 1$ a $q \mid mp - 1$, nutně $pq \mid (nq-1)(mp-1) = mnpq - (mp+nq-1)$. Odtud již plyne $pq \mid mp + nq - 1$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte několik čtveřic m, n, p, q vyhovujících předpokladům zadání. [Vyhovuje libovolná čtveřice, pro niž jsou oba zlomky $(mp-1)/q$, $(nq-1)/p$ celá čísla.]

N2. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla. Dokažte, že jestliže jsou a, b nesoudělná a $a \mid bc$, je $a \mid c$. [Protože $(a,b) = 1$, existují celá čísla x, y taková, že $ax + by = 1$. Protože $a \mid bc$, existuje k takové, že $ak = bc$. Odtud $aky = bcy = c(1 - ax)$, tedy $c = a(ky + cx)$ neboli $a \mid c$.]

N3. Pro celá čísla a, b, c, d platí $b \mid a + c$, $a \mid b + d$. Dokažte, že $ab \mid ad + bc + cd$. [$ab \mid (a+c)(b+d) = ab + (ad + bc + cd)$]

D1. Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m-1$ a m dělí $2n-1$. [59–A–II–3]

D2. Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro které je číslo $4(mn+1)$ dělitelné číslem $(m+n)^2$. [60–A–II–3]

D3. Najděte všechny trojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňující následující podmínky:

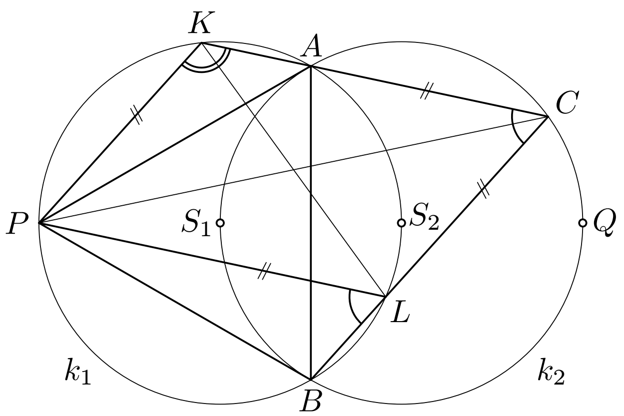
$$p \mid q + r, \quad q \mid r + 2p, \quad r \mid p + 3q.$$

[55–A–III–5]

5. *Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2 o poloměru rovném vzdálenosti jejich středů. Jejich průsečíky označme A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B, který označíme L. Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě různém od A, který označíme K. Dokažte, že přímka, na níž leží těžnice z vrcholu C trojúhelníku KLC, prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C.*

Řešení. Označme S_1, S_2 středy kružnic k_1, k_2. Nechť P je takový bod kružnice k_1, že PS_2 je jejím průměrem. Ukážeme, že hledaným pevným bodem je bod P, tj. dokážeme, že střed úsečky KL leží s body P, C na jedné přímce.

Označme Q bod souměrně sdružený s bodem S_1 podle středu S_2 kružnice k_2. To znamená, že S_1Q je průměrem kružnice k_2 a úhel S_1BQ je pravý, BQ je tudíž tečnou kružnice k_1. Vzhledem k podmínkám úlohy musíme bod C volit uvnitř kratšího oblouku AQ kružnice k_2. Z osové souměrnosti podle osy S_1S_2 je i PA tečnou kružnice k_1, proto je bod K vnitřním bodem kratšího oblouku PA kružnice k_1 (obr. 10).



Obr. 10

Protože kružnice mají stejné poloměry, jsou trojúhelníky S_1S_2A, S_1S_2B rovnostranné a velikost středového úhlu BS_1A je $120°$. Příslušný obvodový úhel BPA má proto velikost $60°$. Navíc body A, B jsou souměrně sdružené podle přímky PS_2, takže

$|PA| = |PB|$ a trojúhelník ABP je rovnostranný.[3] Všechny obvodové úhly nad shodnými tětivami PA, PB, AB mají tedy velikost $60°$ (jestliže vrchol leží na delším oblouku), resp. $120°$ (jestliže vrchol leží na kratším oblouku). U tětivy AB to platí i pro obvodové úhly na kružnici k_2, protože obě kružnice jsou shodné.

Z uvedeného dostáváme

$$|\sphericalangle ACB| = 60°, \qquad |\sphericalangle PLB| = 60°, \qquad |\sphericalangle PKA| = 120°.$$

Z rovnosti prvých dvou úhlů plyne rovnoběžnost přímek PL a KC a z toho, že součet prvního a třetího úhlu je $180°$, plyne rovnoběžnost přímek PK a LC. Čtyřúhelník $PLCK$ je tedy rovnoběžník, odkud už přímo plyne dokazované tvrzení (úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí, takže přímka PC prochází středem úsečky KL).

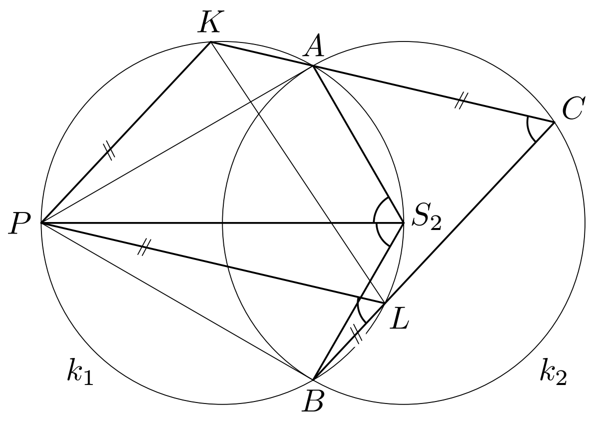
Jiné řešení. Označme body stejně jako v prvním řešení. Jediné, co potřebujeme dokázat, je, že $PLCK$ je rovnoběžník.

Body A, B jsou souměrně sdružené podle přímky PS_2, proto vzhledem k vlastnostem obvodových a středových úhlů platí (obr. 11)

$$|\sphericalangle PLB| = |\sphericalangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AS_2B| = |\sphericalangle ACB|$$

a odtud už plyne $PL \parallel KC$.

Čtyřúhelník $PLAK$ je tedy lichoběžník (pořadí jeho vrcholů je dáno tím, že bod K je vnitřním bodem kratšího oblouku AP, jak víme z prvního řešení), a protože je tětivový (je vepsán kružnici k_1), musí být rovnoramenný. Jeho úhlopříčky KL, PA jsou tedy shodné, a protože z výše zmíněné souměrnosti máme $|PA| = |PB|$, platí též $|KL| = |PB|$. Čtyřúhelník $KPBL$ je tětivový a jeho protilehlé strany KL, PB jsou shodné, takže to rovněž musí být rovnoramenný lichoběžník[4] (obr. 11). Odtud už dostáváme $PK \parallel LC$.



Obr. 11

Poznámka. Dané tvrzení platí, i když připustíme, že kružnice k_1, k_2 mají různé poloměry, přičemž S_2 leží na k_1; v druhém uvedeném řešení jsme totiž shodnost kružnic

[3] To ostatně plyne i z toho, že P, B, S_2, A jsou čtyři ze šesti vrcholů pravidelného šestiúhelníku vepsaného do k_1.

[4] Vyplývá to například z rovnosti obvodových úhlů PLB, KPL nad shodnými tětivami PB, KL, anebo jednoduše ze souměrnosti podle osy úsečky BL.

mlčky využili jen ke zjištění, na kterém z oblouků AP bod K bude ležet. Na další úvahy však poloha bodu K nemá podstatný vliv. Podobně lze rozborem několika případů ukázat, že tvrzení úlohy platí i v případě, kdy bod L na kružnici k_1 je určen jako její druhý průsečík s *přímkou* BC.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že každý tětivový lichoběžník je rovnoramenný. [Jestliže $PQRS$ je tětivový lichoběžník se základnou PQ, ze střídavých úhlů plyne $|\sphericalangle QPR| = |\sphericalangle SRP|$. Obvodové úhly nad tětivami QR, PS tedy mají stejnou velikost, a proto musejí být tětivy QR, PS shodné. Jiný způsob: Osa každé tětivy prochází středem kružnice, proto je osa strany PQ totožná s osou strany RS (jsou rovnoběžné a procházejí společným bodem) a podle této osy jsou úsečky PS, QR souměrně sdružené, tedy shodné.]

N2. Dokažte, že ve čtyřúhelníku se úhlopříčky navzájem půlí, právě když to je rovnoběžník. [Jestliže se v čtyřúhelníku $ABCD$ úhlopříčky půlí v bodě S, jsou trojúhelníky ABS, CDS shodné a ze střídavých úhlů $AB \parallel CD$, analogicky $BC \parallel AD$. Jestliže $ABCD$ je rovnoběžník s průsečíkem úhlopříček S, plyne ze střídavých úhlů shodnost trojúhelníků ABS, CDS, tj. shodnost úseček BS, SD, resp. AS, SC.]

D1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD. [58–A–I–2]

D2. Je dána kružnice k s tětivou AC, která není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný do kružnice k. Určete množinu průsečníků přímek BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům. [59–A–III–4]

6. *Najděte největší reálné číslo k takové, že nerovnost*

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{(k+2)(a+b)} \geqq \sqrt{ab}$$

platí pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

ŘEŠENÍ. Pro $k = 2$ se dá nerovnost po vykrácení upravit na tvar $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$, což je známá nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platná pro libovolná kladná čísla a, b. Hledané největší k je tedy určitě aspoň 2. Zkoumejme dále danou nerovnost jen za předpokladu $k \geqq 2$.

Ekvivalentní úpravou (protože $k+2>0$) dostaneme

$$2(a^2+kab+b^2) \geqq (k+2)(a+b)\sqrt{ab}$$

a po vydělení obou stran kladným číslem b^2 máme

$$2\Big(\frac{a^2}{b^2}+k\,\frac{a}{b}+1\Big) \geqq (k+2)\,\Big(\frac{a}{b}+1\Big)\,\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Označme $\sqrt{a/b} = x$. Vhodnou volbou kladných čísel a, b nabude x libovolné kladné hodnoty. Dále proto stačí zabývat se nerovností

$$2(x^4+kx^2+1) \geqq (k+2)(x^2+1)x$$

a hledat největší k takové, že uvedená nerovnost je splněna pro každé kladné x. Po jednoduchých ekvivalentních úpravách směřujících k osamostatnění k dostáváme

$$\begin{aligned} k\big((x^2+1)x-2x^2\big) &\leqq 2\big(x^4+1-(x^2+1)x\big),\\ k(x^3-2x^2+x) &\leqq 2(x^4-x^3-x+1),\\ kx(x^2-2x+1) &\leqq 2\big(x^3(x-1)-(x-1)\big),\\ kx(x-1)^2 &\leqq 2(x-1)^2(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Pro $x = 1$ je poslední nerovnost splněna vždy. Pro $x \neq 1$ nerovnost vydělíme kladným výrazem $x(x-1)^2$ a získáme přímo odhad pro k:

$$k \leqq \frac{2(x^2+x+1)}{x} = 2 + 2\Big(x + \frac{1}{x}\Big). \tag{1}$$

Pro kladné x je $x+1/x \geqq 2$ s rovností jedině pro $x = 1$. Pro $x \neq 1$ výraz $x+1/x$ nabývá všech hodnot z intervalu $(2, \infty)$, pravá strana (1) tudíž nabývá všech hodnot z intervalu $(6, \infty)$. Z toho je zřejmé, že největší k takové, že (1) platí pro všechna kladná $x \neq 1$, je $k = 6$.

Jiné řešení. Danou nerovnost ekvivalentně upravíme:

$$\frac{2}{k+2} \cdot \frac{(a+b)^2 + (k-2)ab}{a+b} \geqq \sqrt{ab},$$

$$\frac{2}{k+2}\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + (k-2)\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) \geqq 1. \tag{2}$$

Označme $u = (a+b)/\sqrt{ab} = \sqrt{a/b} + \sqrt{b/a}$. Poslední výraz jako součet dvou navzájem převrácených kladných čísel může nabýt libovolné hodnoty z intervalu $\langle 2, \infty)$. Úpravou nerovnosti (2) za podmínky $k+2 > 0$ dostáváme

$$\frac{2}{k+2}\Big(u + (k-2)\frac{1}{u}\Big) \geqq 1 \quad \text{neboli} \quad u^2 - \frac{k+2}{2}u + (k-2) \geqq 0. \tag{3}$$

Kvadratická funkce na levé straně poslední nerovnosti má pro každé k kořen $u = 2$ a její koeficient u kvadratického členu je kladný. Nerovnost (3) proto platí pro každé $u \geqq 2$, právě když vrchol odpovídající paraboly leží v levé polorovině určené přímkou $u = 2$. Protože uvedená kvadratická funkce nabývá minima pro $u_0 = \frac{1}{4}(k+2)$, je poslední nerovnost splněna pro každé $u \geqq 2$, právě když

$$\frac{k+2}{4} \leqq 2 \quad \text{neboli} \quad k \leqq 6.$$

Závěr. Hledaná největší hodnota je $k = 6$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete, jaké hodnoty nabývá výraz $x + 1/x$ pro $x > 0$. [Protože $(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})^2 \geqq 0$, máme $x + 1/x \geqq 2$. Rovnost nastává pro $x = 1$. Výraz nabyde i všechny hodnoty větší než 2, protože rovnice $x + 1/x = p$ má pro $p > 2$ dva kladné kořeny $\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4}$.]

N2. Určete všechny hodnoty parametru p, pro které kvadratická funkce $f(x) = x^2+px+p-1$ nabývá v oboru kladných čísel jen kladných hodnot. [Protože $f(x) = (x+1)(x+p-1)$, jsou kořeny funkce -1 a $1-p$. Daná podmínka je splněna, právě když ani jeden z kořenů není kladný, tedy právě když $p \geqq 1$.]

D1. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy se mění v rovnost. [59–C–I–5]

D2. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]