60. ročník Matematické olympiády

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Pořadatelům výstavy „Na Měsíc a ještě dál" se po prvním výstavním dni zdálo, že mají malou návštěvnost, proto snížili vstupné o 12 Kč. Tím se sice druhý den zvýšil počet návštěvníků o 10 %, ale celková denní tržba se snížila o 5 %. Kolik korun stálo vstupné po slevě? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Informace ze zadání uspořádáme do následující tabulky:

	první den	druhý den
počet návštěvníků	n	$1{,}1n$
vstupné (Kč za osobu)	$x+12$	x
celková denní tržba (Kč)	$n(x+12)$	$1{,}1nx$, resp. $0{,}95n(x+12)$

Z posledního políčka tabulky sestavíme rovnici, kterou (za předpokladu $n>0$) vyřešíme:

$$\begin{aligned} 1{,}1nx &= 0{,}95n(x+12),\\ 1{,}1x &= 0{,}95x+11{,}4,\\ 0{,}15x &= 11{,}4,\\ x &= 76. \end{aligned}$$

Vstupné po slevě stálo 76 Kč.

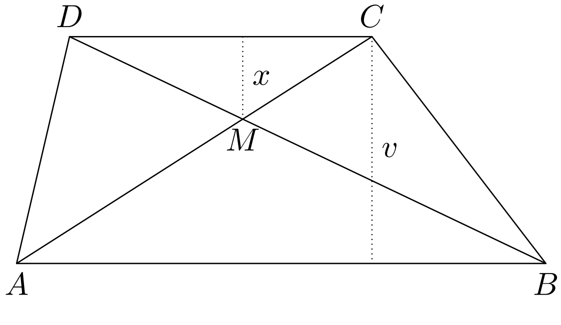
Hodnocení. 3 body za sestavení tabulky nebo její obdobu, z toho 1 bod za informace v prvních dvou řádcích pod záhlavím a 2 body za informace v posledním řádku; 2 body za sestavení a řešení rovnice; 1 bod za výsledek.

Uvede-li řešitel ve své práci variantu, že první den nikdo nedorazil, tj. $n=0$, a že vstupné po slevě mohlo být tudíž jakékoli, nelze ji uznat jako řešení úlohy. (V zadání je totiž psáno, že se druhý den počet návštěvníků *zvýšil* o 10 %.) Pokud však tuto variantu řešitel doplní ke správnému řešení úlohy, body mu za to nestrhávejte.

Z9–III–2

Lichoběžník $ABCD$, kde strana AB je rovnoběžná se stranou CD, je rozdělen úhlopříčkami, které se protínají v bodě M, na čtyři části. Určete jeho obsah, víte-li, že trojúhelník AMD má obsah $8\,\mathrm{cm}^2$ a trojúhelník DCM má obsah $4\,\mathrm{cm}^2$. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Úhly BMA a DMC mají stejnou velikost, neboť jsou to úhly vrcholové. Úhly ABM a CDM mají stejnou velikost, protože to jsou úhly střídavé. Trojúhelníky ABM a CDM jsou tedy podobné (podle věty *uu*). Postupně zjistíme poměr obsahů těchto dvou trojúhelníků.



Výšku lichoběžníku označme v a výšku trojúhelníku CDM kolmou ke straně CD označme x, viz obrázek. Pro obsahy trojúhelníků CDM a CDA platí

$$\begin{aligned} S_{CDM} &= \frac{1}{2}|CD| \cdot x = 4\,(\mathrm{cm}^2), \\ S_{CDA} &= \frac{1}{2}|CD| \cdot v = 12\,(\mathrm{cm}^2). \end{aligned}$$

Porovnáním obou výrazů zjišťujeme, že $v = 3x$. Výška trojúhelníku ABM kolmá ke straně AB je podle obrázku rovna $v - x = 3x - x = 2x$. Podobné trojúhelníky CDM a ABM tedy mají odpovídající si výšky v poměru $1 : 2$, obsahy těchto trojúhelníků jsou proto v poměru $1^2 : 2^2$, tj. $1 : 4$. Obsah trojúhelníku ABM je

$$S_{ABM} = 4 \cdot S_{CDM} = 4 \cdot 4 = 16\,(\mathrm{cm}^2).$$

K vyřešení úlohy zbývá určit obsah trojúhelníku MBC. Z obrázku jednoduše odvodíme následující vztahy:

$$\begin{aligned} S_{AMD} &= S_{ABD} - S_{ABM}, \\ S_{MBC} &= S_{ABC} - S_{ABM}, \end{aligned}$$

a protože $S_{ABC} = S_{ABD}$, platí

$$S_{MBC} = S_{AMD} = 8\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ získáme sečtením obsahů jednotlivých trojúhelníků:

$$4 + 8 + 16 + 8 = 36\,(\mathrm{cm}^2).$$

Jiné řešení. Trojúhelníky CDA a CDM mají společnou stranu CD. Protože jsou jejich obsahy v poměru $3 : 1$, musejí být i jejich výšky kolmé ke straně CD v poměru $3 : 1$. Pokud první z těchto výšek označíme v, bude druhá z nich rovna $\frac{1}{3}v$. Výška trojúhelníku ABM kolmá ke straně AB je rovna rozdílu zmíněných výšek, tedy $v - \frac{1}{3}v = \frac{2}{3}v$.

Trojúhelníky ABD a ABM mají společnou stranu AB a právě jsme ukázali, že jejich výšky kolmé k této straně jsou v poměru $3 : 2$. Ve stejném poměru musejí být i obsahy těchto trojúhelníků. Ze zadaní víme, že rozdíl obsahů je $8\,\mathrm{cm}^2$, obsah trojúhelníku ABD je tudíž $3 \cdot 8 = 24\,(\mathrm{cm}^2)$ a obsah trojúhelníku ABM je $2 \cdot 8 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$.

Pro určení obsahu lichoběžníku potřebujeme znát ještě obsah trojúhelníku MBC. Trojúhelníky CDA a CDB mají společnou stranu CD a shodují se i ve výšce kolmé na tuto stranu, proto i jejich obsahy musejí být shodné. Trojúhelník CDM tvoří společnou část těchto trojúhelníků, zbývající část trojúhelníku CDA musí mít stejný obsah jako zbývající část trojúhelníku CDB. Neboli obsah trojúhelníku DAM, který je podle zadání $8\,\mathrm{cm}^2$, je roven obsahu trojúhelníku MBC.

Známe obsahy všech čtyř dílčích částí lichoběžníku $ABCD$; obsah tohoto lichoběžníku je

$$4 + 8 + 16 + 8 = 36\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hodnocení. 2 body za obsah trojúhelníku MBC; 1 bod za zjištění poměru výšek trojúhelníků CDM a CDA; 1 bod za odpovídající určení výšky trojúhelníku ABM; 1 bod za obsah trojúhelníku ABM; 1 bod za správný závěr.

Z9–III–3

Ctibor a Míla počítali ze sbírky tutéž úlohu. Byly zadány tři délky hran čtyřbokého hranolu v milimetrech a úkolem bylo vypočítat jeho objem a povrch. Ctibor nejprve převedl zadané délky na centimetry. Počítalo se mu tak snáze, protože i po převodu byly všechny délky vyjádřeny celými čísly. Oběma vyšly správné výsledky, Míle v mm^3 a mm^2, Ctiborovi v cm^3 a cm^2. Mílin výsledek v mm^3 byl o 17 982 větší než Ctiborův výsledek v cm^3. Mílin výsledek v mm^2 byl o 5 742 větší než Ctiborův výsledek v cm^2. Určete délky hran hranolu.

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Zadané délky v cm označíme a, b, c. Tytéž délky v mm jsou pak $10a$, $10b$, $10c$. Vyjádříme objemy a povrchy vypočítané Ctiborem i Mílou:

$$\begin{aligned} V_C &= abc, \\ V_M &= 10a \cdot 10b \cdot 10c = 1000abc, \\ S_C &= 2(ab + bc + ca), \\ S_M &= 2(10a \cdot 10b + 10b \cdot 10c + 10c \cdot 10a) = 200(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Podle zadaných rozdílů sestavíme rovnice

$$\begin{aligned} V_M - V_C &= 999abc = 17\,982, \\ S_M - S_C &= 198(ab + bc + ca) = 5\,742, \end{aligned}$$

které upravíme:

$$\begin{aligned} abc &= 18, \\ ab + bc + ca &= 29. \end{aligned}$$

Najdeme všechna přípustná řešení první rovnice, tedy všechny možné rozklady čísla 18 na součin tří přirozených čísel. U každé z těchto možností zkontrolujeme, zda platí i druhá rovnice (uvažujeme pouze $a \leqq b \leqq c$):

a	b	c	$ab + bc + ca$
1	1	18	$1 + 18 + 18 = 37$
1	2	9	$2 + 18 + 9 = \mathbf{29}$
1	3	6	$3 + 18 + 6 = 27$
2	3	3	$6 + 9 + 6 = 21$

Tabulka ukazuje jediné řešení vyhovující oběma rovnicím, hrany zadaného hranolu tak mají tyto délky: 10 mm, 20 mm a 90 mm.

Jiné řešení. Přirozené číslo vyjadřující objem hranolu v cm^3 je tisíckrát menší než číslo vyjadřující totéž v mm^3. Podobně číslo vyjadřující povrch v cm^2 je stokrát menší než číslo vyjadřující totéž v mm^2. Zadání úlohy zapsané pomocí algebrogramů vypadá následovně:

$$\begin{array}{rrrrr} J & K & 0 & 0 & 0 \\ - & & & J & K \\ \hline 1 & 7 & 9 & 8 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} X & Y & 0 & 0 \\ - & & X & Y \\ \hline 5 & 7 & 4 & 2 \end{array}$$

Při řešení postupujeme zprava a vidíme, že písmeno lze nahradit číslicí vždy jediným možným způsobem. (Při sestavování algebrogramu bylo jasné, že menšenec má mít stejný počet číslic jako rozdíl, a to proto, že menšitel je o několik řádů menší než menšenec a zadaný rozdíl nezačíná číslicí 9.)

Algebrogramy mají jediné řešení: $J = 1$, $K = 8$, tj. $V_C = 18\,(\mathrm{cm}^3)$, a $X = 5$, $Y = 8$, tj. $S_C = 58\,(\mathrm{cm}^2)$. Dál pokračujeme tabulkou stejně jako u předchozího postupu.

Hodnocení. 1 bod za $V_C = 18$; 1 bod za $S_C = 58$, popř. za $ab + bc + ca = 29$; 1 bod za zdůvodnění postupu při hledání objemu a povrchu; 2 body za všechny možné rozklady čísla 18; 1 bod za určení správného rozkladu.

Z9–III–4

Na tabuli jsou napsána pouze čísla 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{6}$. Na tabuli můžeme připsat součet nebo součin libovolných dvou čísel z tabule. Je možné takovým připisováním dosáhnout toho, aby se na tabuli objevila čísla a) $\frac{1}{60}$, b) $\frac{2011}{375}$, c) $\frac{1}{7}$? (*V. Bachratá, J. Mazák*)

Možné řešení. a) Ano, na tabuli můžeme napsat číslo $\frac{1}{60}$. Například tak, že připíšeme číslo $\frac{1}{10}$, které získáme jako součin čísel již napsaných: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$. A poté napíšeme číslo $\frac{1}{60}$, neboť je rovno součinu $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}$.

b) Ano, na tabuli můžeme napsat číslo $\frac{2011}{375}$. Nejprve ukážeme, že na tabuli můžeme napsat číslo $\frac{1}{375}$. To lze rozložit na součin čísel, která jsou na tabuli od počátku: $\frac{1}{375} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$. Vidíme tedy, že k původním číslům můžeme postupně připsat čísla $\frac{1}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$, $\frac{1}{75} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{15}$ a $\frac{1}{375} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{75}$. K číslu $\frac{1}{375}$ můžeme připsat ještě jedno takové, a sice jako součin již napsaných čísel 1 a $\frac{1}{375}$. Posléze sečtením čísel $\frac{1}{375}$ a $\frac{1}{375}$ dostaneme $\frac{2}{375}$ a postupným přičítáním $\frac{1}{375}$ tak můžeme dojít k jakémukoli zlomku, který má ve jmenovateli 375 a v čitateli přirozené číslo. Tedy můžeme dojít až k žádanému číslu $\frac{2011}{375}$.

c) Ne, na tabuli nemůžeme napsat číslo $\frac{1}{7}$. Povolené jsou pouze operace sčítání a násobení zlomků. Ukažme si, jaký mají tyto operace vliv na jmenovatel. (Zanedbáme, že během těchto operací můžeme zlomky i krátit. Na náš závěr toto zanedbání nebude mít vliv.)

- Pokud násobíme dva zlomky, je ve jmenovateli výsledku součin jmenovatelů původních zlomků.
- Když sčítáme dva zlomky, je ve jmenovateli výsledku součin, respektive nejmenší společný násobek jmenovatelů původních zlomků.

V prvočíselném rozkladu součinu, popřípadě nejmenšího společného násobku dvou čísel nemůže být prvočíslo, které nebylo v prvočíselném rozkladu žádného z původních dvou čísel. Takže ať provádíme jakékoli povolené operace, nikdy nedostaneme jmenovatel, v jehož rozkladu je prvočíslo, které do té doby nebylo v rozkladu žádného napsaného jmenovatele. Jelikož žádný ze jmenovatelů, které máme na počátku k dispozici, nemá ve svém prvočíselném rozkladu 7, nedokážeme dojít k $\frac{1}{7}$.

Hodnocení. V části a) udělte 1 bod za zdůvodněnou odpověď, přičemž lze ohodnotit i pouhé tvrzení: „Lze, neboť $\frac{1}{60} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$.“

V části b) udělte 2 body za popis jakéhokoli postupu vedoucího k $\frac{2011}{375}$. (Pokud takový postup není uveden, lze udělit 1 bod za postřeh, že v čitateli lze získat díky sčítání jakékoli přirozené číslo.)

V části c) udělte celkem 3 body, z toho 2 body za vysvětlení, jaký má na jmenovatel vliv násobení a jaký sčítání, a 1 bod za konstatování, že násobením a nejmenšími společnými násobky nezískáme nové prvočíslo.