60. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Po okruhu běhají dva atleti, každý jinou konstantní rychlostí. Jestliže běží opačnými směry, potkávají se každých 10 minut, jestliže běží stejným směrem, potkávají se každých 40 minut. Za jakou dobu uběhne okruh rychlejší atlet?

2. Je dán čtverec se stranou délky 6 cm. Najděte množinu středů všech příček čtverce, které ho dělí na dva čtyřúhelníky, z nichž jeden má obsah $12\,\mathrm{cm}^2$. (Příčkou čtverce rozumíme úsečku, jejíž krajní body leží na stranách čtverce.)

3. Nechť x, y jsou kladná celá čísla taková, že obě čísla $3x + 5y$ a $5x + 2y$ jsou dělitelná číslem 60. Zdůvodněte, proč číslo 60 dělí také součet $2x + 3y$.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 20. ledna 2011

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

60. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

1. Označme rychlosti běžců v_1 a v_2 tak, že $v_1 > v_2$ (rychlosti udáváme v okruzích za minutu). Představme si, že atleti vystartují ze stejného místa, ale opačným směrem. V okamžiku jejich dalšího setkání po 10 minutách bude součet délek obou proběhnutých úseků odpovídat přesně délce jednoho okruhu, tedy $10v_1 + 10v_2 = 1$.

Jestliže běží atleti ze stejného místa stejným směrem, dojde k dalšímu setkání, jakmile rychlejší atlet zaběhne o jeden okruh víc než ten pomalejší. Proto $40v_1 - 40v_2 = 1$.

Dostali jsme soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými v_1, v_2:

$$\begin{aligned} 10v_1 + 10v_2 &= 1, \\ 40v_1 - 40v_2 &= 1, \end{aligned}$$

kterou vyřešíme například tak, že ke čtyřnásobku první rovnice přičteme druhou, čímž dostaneme $80v_1 = 5$ neboli $v_1 = \frac{1}{16}$. Zajímá nás, jak dlouho trvá rychlejšímu běžci proběhnout jeden okruh, tedy hodnota podílu $1/v_1$. Po dosazení vypočtené hodnoty v_1 dostaneme *odpověď*: 16 minut.

Poznámka. Úlohu lze rovněž řešit úvahou: za 40 minut uběhnou atleti dohromady 4 okruhy (to plyne z první podmínky), přitom rychlejší o 1 okruh více než pomalejší (to plyne z druhé podmínky). To tedy znamená, že první za uvedenou dobu uběhne 2,5 okruhu a druhý 1,5 okruhu, takže rychlejší uběhne jeden okruh za 40/2,5 neboli 16 minut.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho po 2 bodech za sestavení jednotlivých rovnic a 2 body za výpočet požadované hodnoty.

2. Jestliže příčka dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, musejí její koncové body ležet na protilehlých stranách čtverce. V takovém případě jsou oba čtyřúhelníky lichoběžníky nebo pravoúhelníky (pro potřeby tohoto řešení budeme pravoúhelník považovat za speciální lichoběžník). Označme daný čtverec $ABCD$, koncové body příčky označme K a L. Předpokládejme, že bod K leží na straně AD, potom bod L leží na straně BC. Jeden ze čtyřúhelníků $KABL$ a $KDCL$ má podle zadání obsah $12\,\text{cm}^2$; nechť je to např. lichoběžník $KABL$.

Obsah lichoběžníku vypočteme jako součin jeho výšky s délkou střední příčky. Výška je v našem případě rovna délce strany čtverce, tedy 6 cm. Jeho střední příčka má tudíž délku 2 cm. Z toho plyne, že střed úsečky KL musí ležet na ose strany AB ve vzdálenosti 2 cm od středu strany AB. Platí to i naopak: jestliže střed úsečky KL leží v popsané poloze, bude čtyřúhelník $KABL$ lichoběžník s obsahem $12\,\text{cm}^2$.

Budeme-li místo lichoběžníku $KABL$ uvažovat lichoběžník $KDCL$, vyjde střed příčky KL na osu úsečky CD ve vzdálenosti 2 cm od středu strany CD.

Pokud příčka KL spojuje body na stranách AB a CD, dostaneme další dva možné body ležící na spojnici středů úseček AD a BC. Hledanou množinu tedy tvoří čtyři body, které leží na příčkách spojujících středy protilehlých stran čtverce ve vzdálenosti 1 cm od jeho středu.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jestliže řešitel nezdůvodní, že nalezené body mají požadovanou vlastnost (má jen důkaz nutné podmínky), udělte nejvýše 5 bodů. Za objevení jednoho z bodů zkoumané množiny bez důkazu správnosti dejte jen 1 bod a za popis správné množiny bez důkazu správnosti 2 body.

3. Na základě předpokladu ze zadání víme, že existují kladná celá čísla m a n, pro která platí

$$3x + 5y = 60m,$$
$$5x + 2y = 60n.$$

Na tyto vztahy se můžeme dívat jako na soustavu lineárních rovnic s neznámými x a y a parametry m a n. Vyřešit ji umíme libovolnou standardní metodou, například od dvojnásobku první rovnice odečteme pětinásobek druhé a vyjádříme x, potom dopočítáme y. Dostaneme

$$x = \frac{60(5n - 2m)}{19}, \qquad y = \frac{60(5m - 3n)}{19}.$$

Protože čísla 19 a 60 jsou nesoudělná, jsou obě čísla x a y dělitelná 60. Proto i součet $2x + 3y$ je dělitelný 60.

Jiné řešení. Víme, že $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. Přitom čísla 3, 4, 5 jsou po dvou nesoudělná, proto na důkaz dělitelnosti 60 stačí dokázat dělitelnost jednotlivými čísly.

Protože číslo $3x + 5y$ je dělitelné 5, je i x dělitelné 5. Podobně z relace $5 \mid 5x + 2y$ plyne $5 \mid y$. Proto 5 dělí i $2x + 3y$.

Protože číslo $3x + 5y$ je dělitelné 3, je y dělitelné 3. A protože $3 \mid 5x + 2y$, je také $3 \mid 5x$, a tedy $3 \mid x$. Proto 3 dělí i $2x + 3y$.

Protože $4 \mid 3x + 5y$ a $4 \mid 5x + 2y$, je $4 \mid (3x + 5y) + (5x + 2y) = 8x + 7y$, takže $4 \mid y$. A protože například $4 \mid 3x + 5y$, je také $4 \mid 3x$ neboli $4 \mid x$. Proto 4 dělí i $2x + 3y$.

Jiné řešení. Vyjádříme výraz $2x + 3y$ pomocí $3x + 5y$ a $5x + 2y$. Budeme hledat čísla p a q taková, že $2x + 3y = p(3x + 5y) + q(5x + 2y)$ pro každou dvojici celých čísel x, y. Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$(2 - 3p - 5q)x + (3 - 5p - 2q)y = 0. \qquad (*)$$

Budou-li hledaná čísla p a q splňovat soustavu

$$3p + 5q = 2,$$
$$5p + 2q = 3,$$

bude zřejmě rovnost $(*)$ splněna pro každou dvojici x, y. Vyřešením soustavy dostaneme $p = 11/19$, $q = 1/19$. Dosazením do $(*)$ dostáváme vyjádření

$$19(2x + 3y) = 11(3x + 5y) + (5x + 2y),$$

z něhož plyne, že spolu s čísly $3x + 5y$ i $5x + 2y$ je současně dělitelné 60 i číslo $2x + 3y$, protože čísla 19 a 60 jsou nesoudělná.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jestliže chybí zmínka o nesoudělnosti čísel 19 a 60 a tato nesoudělnost je v řešení potřeba, udělte nejvýše 5 bodů. Za částečný pokrok v prvním řešení dejte 2 body za sestavení soustavy rovnic a 4 body za sestavení a vyřešení soustavy rovnic nebo vyjádření x a y pomocí parametrů.