**60. ročník matematické olympiády**

# Úlohy krajského kola kategorie C

**1.** Na tabuli jsou napsána právě tři (ne nutně různá) reálná čísla. Víme, že součet libovolných dvou z nich je tam napsán také. Určete všechny trojice takových čísel.

**2.** Najděte všechna kladná celá čísla $n$, pro která je číslo $n^2 + 6n$ druhou mocninou celého čísla.

**3.** Lichoběžník $ABCD$ má základny $AB$ a $CD$ po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod $E$ strany $AB$ platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků $ADE$, $CDE$, $BCE$, jež označíme po řadě $K$, $L$, $M$, tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.
   a) Dokažte, že přímky $KM$ a $CM$ svírají pravý úhel.
   b) Vypočtěte délky ramen lichoběžníku $ABCD$.

**4.** Nechť $x$, $y$, $z$ jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že čísla

$$x + y + z - xyz \quad \text{a} \quad xy + yz + zx - 3$$

nemohou být záporná současně.

Krajské kolo kategorie C se koná

**v úterý 5. dubna 2011**

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

*Řešení úloh krajského kola kategorie C*

**1.** Označme čísla napsaná na tabuli $a$, $b$, $c$. Součet $a+b$ se též nalézá na tabuli, je tedy roven jednomu z čísel $a$, $b$, $c$. Kdyby $a+b$ bylo rovno $a$ nebo $b$, byla by na tabuli aspoň jedna nula. Rozebereme proto tři případy podle počtu nul napsaných na tabuli.

Jsou-li na tabuli aspoň dvě nuly, snadno se přesvědčíme, že součet každých dvou čísel z tabule je tam rovněž. Dostáváme, že trojice $t, 0, 0$ je pro libovolné reálné číslo $t$ řešením úlohy.

Je-li na tabuli právě jedna nula, je tam trojice $a, b, 0$, kde $a$ i $b$ jsou nenulová čísla. Součet $a+b$ tudíž není roven ani $a$, ani $b$, musí tedy být roven 0. Dostáváme tak další trojici $t, -t, 0$, která je řešením úlohy pro libovolné reálné číslo $t$.

Jestliže na tabuli není ani jedna nula, součet $a+b$ není roven ani $a$, ani $b$, proto $a+b=c$. Ze stejných důvodů je $b+c=a$ a $c+a=b$. Dostali jsme soustavu tří lineárních rovnic s neznámými $a$, $b$, $c$, kterou můžeme vyřešit. Ovšem hned z prvních dvou rovnic po dosazení vyjde $b+(a+b)=a$ neboli $b=0$. To je ve sporu s tím, že na tabuli žádná nula není.

*Závěr.* Úloze vyhovují trojice $t, 0, 0$ a $t, -t, 0$ pro libovolné reálné číslo $t$ a žádné jiné.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jestliže řešitel neověří správnost nalezených trojic a tato správnost nevyplývá přímo z jeho postupu, udělte nejvýše 5 bodů. Za pouhé objevení všech trojic dejte 2 body. Za objevení neúplné, ale nekonečné množiny vyhovujících trojic 1 bod.

**2.** Zřejmě $n^2+6n > n^2$ a zároveň $n^2+6n < n^2+6n+9=(n+3)^2$. V uvedeném rozmezí leží jen dvě druhé mocniny celých čísel: $(n+1)^2$ a $(n+2)^2$.

V prvním případě máme $n^2+6n=n^2+2n+1$, tedy $4n=1$, tomu však žádné celé číslo $n$ nevyhovuje.

V druhém případě máme $n^2+6n=n^2+4n+4$, tedy $2n=4$. Dostáváme tak jediné řešení $n=2$.

**Jiné řešení**. Budeme zkoumat rozklad $n^2+6n=n(n+6)$. Společný dělitel obou čísel $n$ a $n+6$ musí dělit i jejich rozdíl, proto jejich největším společným dělitelem mohou být jen čísla 1, 2, 3 nebo 6. Tyto čtyři možnosti rozebereme.

Kdyby byla čísla $n$ a $n+6$ nesoudělná, muselo by být každé z nich druhou mocninou. Rozdíl dvou druhých mocnin přirozených čísel však nikdy není 6. Pro malá čísla se o tom snadno přesvědčíme, a pro $k \geqq 4$ už je rozdíl byť i jen sousedních čtverců $k^2$ a $(k-1)^2$ aspoň 7. Vlastnost, že 1, 3, 5 a 7 jsou čtyři nejmenší rozdíly dvou druhých mocnin, využijeme i dále.

Je-li největším společným dělitelem čísel $n$ a $n+6$ číslo 2, je $n=2m$ pro vhodné $m$, které navíc není dělitelné třemi. Jestliže $n(n+6)=4m(m+3)$ je čtverec, musí být i $m(m+3)$ čtverec. Čísla $m$ a $m+3$ jsou však nesoudělná, musí proto být každé z nich druhou mocninou přirozeného čísla. To nastane jen pro $m=1$ neboli $n=2$. Snadno ověříme, že $n(n+6)$ je pak vskutku druhou mocninou celého čísla.

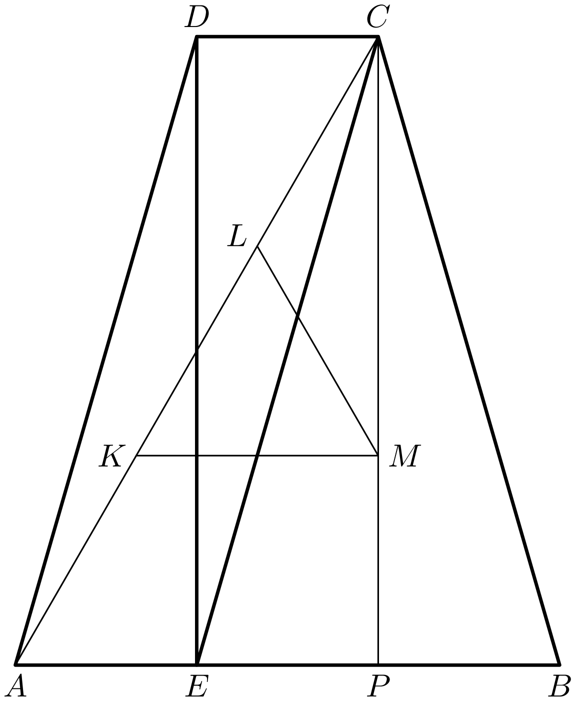
Je-li největším společným dělitelem čísel $n$ a $n+6$ číslo 3, je $n=3m$ pro vhodné liché $m$. Jestliže $n(n+6)=9m(m+2)$ je čtverec, musejí být nesoudělná čísla $m$ a $m+2$ rovněž čtverce. Takové dva čtverce však neexistují.

Je-li největším společným dělitelem čísel $n$ a $n+6$ číslo 6, je $n = 6m$ pro vhodné $m$. Jestliže $n(n+6) = 36m(m+1)$ je čtverec, musejí být čtverce i obě nesoudělná čísla $m$ a $m+1$, což nastane jen pro $m = 0$, my však hledáme jen kladná čísla $n$.

Úloze vyhovuje jedině $n = 2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jestliže řešitel úlohu zredukuje na zvládnutelný konečný počet možností pro $n$ (například jako v prvním řešení), udělte 4 body. Za úvahu typu „$n$ a $n+6$ jsou pro $n$ nedělitelné 2 a 3 nesoudělná, proto to musejí být čtverce“ bez redukce na konečný počet možností dejte nejvýše 3 body. Za objevení řešení $n = 2$ bez důkazu nedávejte žádný bod.

**3.** Čtyřúhelník $AECD$ je rovnoběžník, protože jeho strany $AE$ a $CD$ jsou rovnoběžné a stejně dlouhé (obě měří 6 cm). Na jeho úhlopříčce $AC$ tak leží těžnice trojúhelníku $ADE$ z vrcholu $A$ i těžnice trojúhelníku $CDE$ z vrcholu $C$, a proto na této přímce leží i body $K$ a $L$ (obr. 1). Navíc víme, že těžiště trojúhelníku dělí jeho těžnice v poměru $2:1$, proto jsou úsečky $AK$, $KL$ a $LC$ stejně dlouhé.



Obr. 1

Bod $L$ je středem úsečky $KC$, proto na ose souměrnosti úsečky $KM$ leží nejen výška rovnostranného trojúhelníku $KLM$, ale i střední příčka trojúhelníku $KMC$. Proto je přímka $CM$ kolmá na $KM$.

Zbývá vypočítat délky ramen lichoběžníku $ABCD$. Označme $P$ střed úsečky $EB$. Protože $CM$ je kolmá na $KM$, je těžnice $CP$ kolmá na $EB$, takže trojúhelník $EBC$ je rovnoramenný, a tudíž i daný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný. Délku ramene $BC$ nyní vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku $PBC$, v němž známe délku odvěsny $PB$. Pro druhou odvěsnu $CP$ zřejmě platí

$$|CP| = \frac{3}{2}|CM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,|KM|,$$

jak snadno plyne z vlastností trojúhelníku $KMC$. A protože $|KM| = \frac{2}{3}|AP|$ z podobnosti trojúhelníků $KMC$ a $APC$, je (počítáno v centimetrech)

$$|CP| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,|KM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|AP| = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}|AB| = 12\sqrt{3}.$$

Potom

$$|BC| = \sqrt{|PB|^2 + |PC|^2} = \sqrt{36 + 12^2 \cdot 3} = 6\sqrt{1 + 12} = 6\sqrt{13}.$$

Ramena daného lichoběžníku mají délku $6\sqrt{13}$ cm.

*Alternativní důkaz kolmosti přímek $KM$ a $CM$*: Protože bod $L$ je středem úsečky $KC$ a zároveň $|LK| = |LM|$, neboť trojúhelník $KLM$ je rovnostranný, leží bod $M$ na Thaletově kružnici nad průměrem $KC$, takže trojúhelník $KMC$ je pravoúhlý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za důkaz kolmosti přímek $KM$ a $CM$ a 3 body za výpočet délek obou ramen lichoběžníku $ABCD$. Neúplné řešení hodnoťte podle pokroku, kterého žák dosáhl. V uvedeném řešení by rozdělení bodů bylo následující: důkaz kolmosti $KM$ a $CM$ — 3 body, z toho 1 bod za odůvodnění toho, že bod $L$ je středem úsečky $KC$; výpočet délky úsečky $KM$ — 1 bod; výpočet délky jednotlivých ramen — po 1 bodu.

**4.** Ukážeme, že je-li číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné.

Jestliže $xy + yz + zx < 3$, je aspoň jedno z čísel $xy$, $yz$, $zx$ menší než 1, např. $xy$. Pak $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjevně součet tří kladných čísel.

**Jiné řešení**. Ukážeme, že je-li číslo $x + y + z - xyz$ záporné, pak číslo $xy + yz + zx - 3$ je kladné.

Předpokládejme, že $x + y + z < xyz$. Tím spíš $x < xyz$. Po zkrácení kladného čísla $x$ dostaneme $yz > 1$. Podobně odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Nyní je stačí sečíst a máme $xy + yz + zx > 3$.

**Jiné řešení**. Tvrzení úlohy dokážeme sporem. Předpokládejme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obě tyto nerovnosti jsou symetrické, proto můžeme předpokládat, že čísla $x$, $y$, $z$ jsou označena tak, že $z$ je nejmenší. Z druhé nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, tedy $x + y < 2z$. To je však spor s tím, že číslo $z$ je nejmenší.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.