60. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Rozhodněte, zda mezi všemi osmimístnými násobky čísla 4 je více těch, které ve svém desítkovém zápisu obsahují číslici 1, nebo těch, které číslici 1 neobsahují.

2. Je dán trojúhelník ABC s obsahem S. Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC, je libovolně zvolen bod U. Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

3. Určete všechny dvojice (m, n) kladných celých čísel, pro něž je číslo $4(mn+1)$ dělitelné číslem $(m+n)^2$.

4. Nechť M je množina šesti navzájem různých kladných celých čísel, jejichž součet je 60. Všechna je napíšeme na stěny krychle, na každou právě jedno z nich. V jednom kroku zvolíme libovolné tři stěny krychle se společným vrcholem a každé z čísel na těchto třech stěnách zvětšíme o 1. Určete počet všech takových množin M, jejichž čísla lze napsat na stěny krychle uvedeným způsobem tak, že po konečném počtu vhodných kroků budou na všech stěnách stejná čísla.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 18. ledna 2011

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

60. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Nejprve určeme počet u všech osmimístných čísel dělitelných čtyřmi. Každé takové číslo má ve svém zápisu na prvním místě zleva nenulovou číslici. Máme tak 9 možností. Na následujících pěti místech má libovolnou číslici desítkové soustavy, tj. pro každou pozici máme 10 možností, a končí dvojčíslím, které je dělitelné čtyřmi, tj. 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, ..., 96, celkově tedy 25 možností. Proto je

$$u = 9 \cdot 10^5 \cdot 25 = 22\,500\,000.$$

Podobnou úvahu lze provést i při hledání počtu v všech osmimístných čísel dělitelných čtyřmi, která ve svém desítkovém zápisu *neobsahují* číslici 1. Pro první pozici zleva máme nyní 8 možností a pro každou další z pěti následujících pozic máme 9 možností. Na posledních dvou místech zprava musí být dvojčíslí dělitelné čtyřmi, které však neobsahuje číslici 1. Jsou to všechna dvojčíslí z předchozího odstavce kromě 12 a 16, tedy 23 možností. Proto

$$v = 8 \cdot 9^5 \cdot 23 = 10\,865\,016.$$

Závěr. Protože $u > 2v$, je mezi osmimístnými násobky čísla 4 více těch, které ve svém (desítkovém) zápisu číslici 1 obsahují, než těch, které ji neobsahují.

Poznámka. Počet u všech osmimístných násobků lze také určit jednoduchou úvahou: nejmenší násobek je $A = 10\,000\,000$, největší je $B = 99\,999\,996$, takže hledaný počet je $\frac{1}{4}(B - A) + 1 = \frac{1}{4}(B + 4 - A) = 22\,500\,000$.

K důkazu nerovnosti $u > 2v$ není nutné v vyčíslit, protože podíl

$$\frac{u}{v} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 25}{8 \cdot 9^5 \cdot 23} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23}$$

lze dobře odhadnout pomocí binomické věty

$$\left(\frac{10}{9}\right)^5 = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^5 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9^2} = \frac{136}{81} = \frac{8 \cdot 17}{9^2},$$

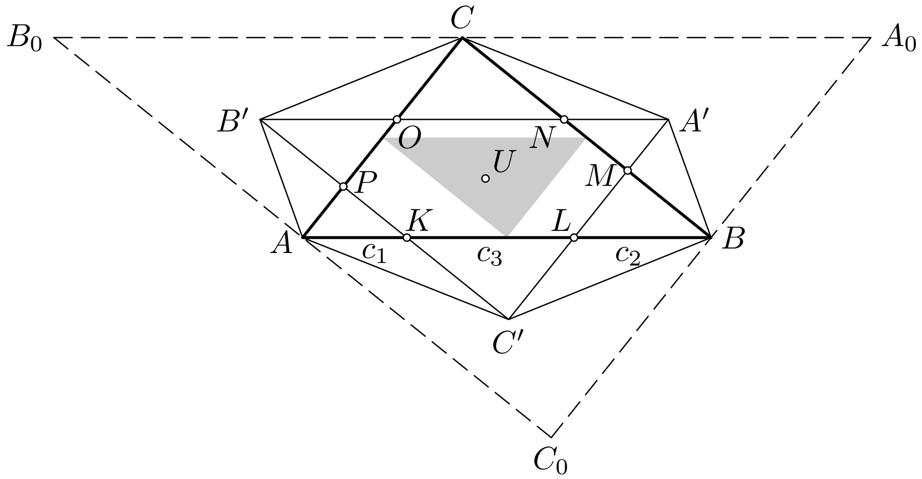
tudíž

$$\frac{u}{v} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23} > \frac{9}{8} \cdot \frac{8 \cdot 17}{9^2} \cdot \frac{25}{23} = \frac{17 \cdot 25}{9 \cdot 23} = \frac{425}{207} > 2.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za správné vyjádření u, 3 body za správné vyjádření v a 1 bod za důkaz nerovnosti $u > 2v$ nebo nerovnosti s ní ekvivalentní. Za numerické chyby při výpočtu strhněte nejvýše 1 bod.

2. Označme T trojúhelník s vrcholy ve středech stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Obsah trojúhelníku XYZ budeme značit symbolem S_{XYZ}.

Protože body A', B', C' jsou zároveň obrazy bodu U ve stejnolehlostech se středy v odpovídajících vrcholech trojúhelníku ABC a koeficientem 2, plyne z předpokladu úlohy, že body A', B', C' leží postupně uvnitř trojúhelníků A_0CB, CB_0A a BAC_0 (to jsou obrazy trojúhelníku T v uvedených stejnolehlostech, na obr. 1 je T vyznačen šedou barvou). Hranice trojúhelníku $A'B'C'$ tudíž protne strany AB, BC, CA postupně v jejich vnitřních bodech K, L, M, N, O, P.



Obr. 1

Protože trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti podle středu U, jsou navzájem si odpovídající strany rovnoběžné a v téže souměrnosti si odpovídají dvojice bodů K a N, L a O i M a P. Proto podle věty *uu* je každý z trojúhelníků AKP, LBM, ONC podobný trojúhelníku ABC. Označme k_1, k_2, k_3 koeficienty podobností, jež zobrazí trojúhelník ABC postupně na trojúhelníky AKP, LBM, ONC. Obrazy trojúhelníků AKP, LBM, ONC ve středové souměrnosti se středem U jsou po řadě trojúhelníky $A'NM$, $OB'P$, LKC'. Ty jsou rovněž podobné trojúhelníku ABC, přičemž odpovídající koeficienty podobností, které na ně převedou trojúhelník ABC, jsou opět k_1, k_2, k_3. Označíme-li c délku strany AB, platí pro délky úseků na straně AB

$$c_1 = |AK| = k_1 c, \quad c_2 = |LB| = k_2 c, \quad c_3 = |KL| = k_3 c,$$

takže

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = k_1 c + k_2 c + k_3 c = (k_1 + k_2 + k_3)c \quad \text{neboli} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Z podobnosti trojúhelníků ABC a LKC' dále plyne, že velikost výšky z vrcholu C' ke straně AB v trojúhelníku ABC' je rovna $k_3 v_c$, kde v_c je velikost výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC. Je tudíž

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2} c \cdot k_3 v_c = k_3 \Big(\frac{1}{2} c v_c\Big) = k_3 S.$$

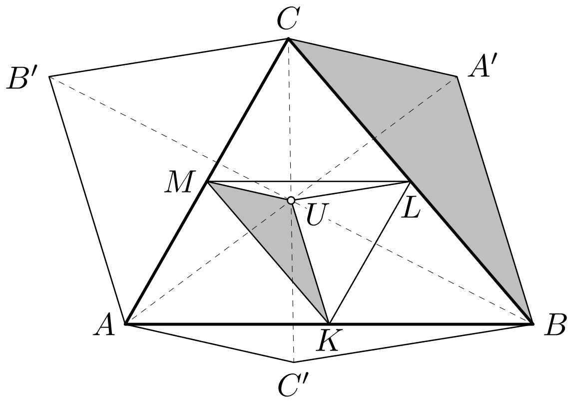
Analogicky $S_{BCA'} = k_1 S$ a $S_{CAB'} = k_2 S$. Pro obsah S' šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tak platí

$$S' = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{CAB'} + S_{ABC'} = (1 + k_1 + k_2 + k_3)S = 2S.$$

Jiné řešení. Označme K, L, M středy stran AB, BC, CA. Stejnolehlost se středem A a koeficientem 2 zobrazí trojúhelník MKU na trojúhelník CBA' (obr. 2), proto $S_{CBA'} = 4 \cdot S_{MKU}$. Podobně $S_{ACB'} = 4 \cdot S_{KLU}$ a $S_{BAC'} = 4 \cdot S_{LMU}$. Odtud

$$S_{CBA'} + S_{ACB'} + S_{BAC'} = 4 \cdot S_{KLM} = S,$$

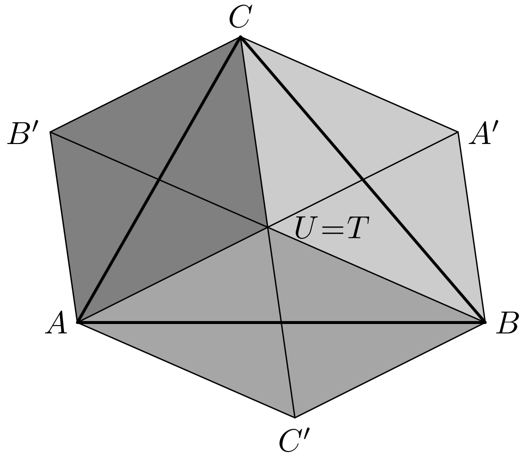
takže šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.



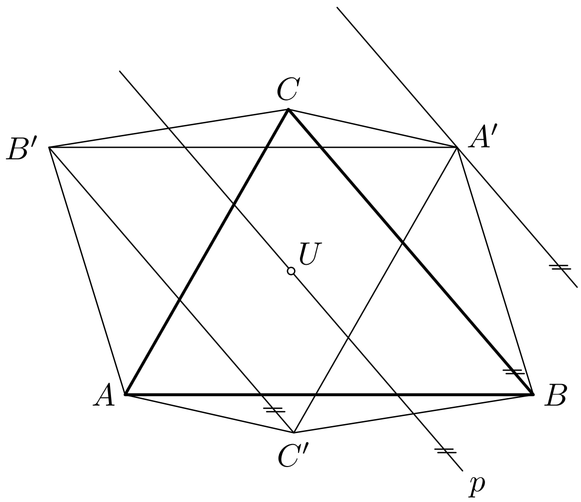
Obr. 2

Jiné řešení. Je-li bod U totožný s těžištěm T trojúhelníku ABC ($U = T$), je tvrzení úlohy splněno, neboť $S_{A'BC} = S_{TBC}$, $S_{B'CA} = S_{TCA}$ a $S_{C'AB} = S_{TAB}$ (obr. 3).

Předpokládejme nyní, že se bod U pohybuje uvnitř trojúhelníku T po přímce p rovnoběžné se stranou BC, a ukažme, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění. Body A', B' a C' leží totiž na rovnoběžkách s přímkou p, a proto se nemění obsah trojúhelníku $A'BC$ ani obsahy rovnoběžníku $BCB'C'$ a trojúhelníku $B'C'A$ (obr. 4). Obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tedy na poloze bodu U na přímce p nezávisí. Podobně lze ukázat, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění, pohybuje-li se bod U po rovnoběžce se stranou AC.



Obr. 3



Obr. 4

Libovolný vnitřní bod U trojúhelníku T přitom získáme jako obraz těžiště T trojúhelníku ABC v zobrazení složeném ze dvou posunutí, a to z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou BC a z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou AC. Proto pro každý bod U uvnitř trojúhelníku T má šestiúhelník $AC'BA'CB'$ stejný obsah jako šestiúhelník odpovídající bodu $U = T$, tedy obsah $2S$, jak jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme U' libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Protože obsah zkoumaného šestiúhelníku je roven součtu obsahů tří čtyřúhelníků $AC'BU'$, $BA'CU'$ a $CB'AU'$, bude tvrzení úlohy zřejmě platit, dokážeme-li bod U' vybrat tak, aby všechny tři zmíněné čtyřúhelníky byly rovnoběžníky. Protože

$$U = \frac{A + A'}{2} = \frac{B + B'}{2} = \frac{C + C'}{2},$$

mají body A', B', C' vyjádření

$$A' = 2U - A, \quad B' = 2U - B, \quad C' = 2U - C,$$

takže potřebné rovnosti

$$\frac{A + B}{2} = \frac{C' + U'}{2}, \quad \frac{B + C}{2} = \frac{A' + U'}{2}, \quad \frac{C + A}{2} = \frac{B' + U'}{2}$$

budou splněny, právě když bod U' bude mít vyjádření $U' = A + B + C - 2U$ neboli $U' = 3T - 2U$, kde $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$ je těžiště trojúhelníku ABC. Odvozená rovnost zapsaná ve tvaru $U' - T = 2(T - U)$ znamená, že kýžený bod U' je určen jako obraz bodu U ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. V ní je ovšem obrazem trojúhelníku T výchozí trojúhelník ABC, takže vnitřní bod U trojúhelníku T se skutečně zobrazí na vnitřní bod U' trojúhelníku ABC, jak jsme potřebovali dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za uvedení (a zdůvodnění) jakýchkoliv částečných výsledků, které vedou k úplnému řešení úlohy, udělte v součtu nejvýše 4 body.

3. Předně si uvědomme, že s každou dvojicí (m, n) kladných celých čísel, která úloze vyhovuje, jí vyhovuje i dvojice (n, m). Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $m \geqq n$.

Pokud kladné celé číslo $A = (m+n)^2$ dělí kladné celé číslo $B = 4(mn+1)$, nutně platí

$$(m + n)^2 \leqq 4(mn + 1) \qquad \text{neboli} \qquad (m - n)^2 \leqq 4.$$

Proto $0 \leqq m - n \leqq 2$. Nastane tedy právě jedna ze tří následujících možností:

- ▷ $m = n$, pak $A = 4n^2$, $B = 4n^2 + 4$ a A dělí B, právě když $4n^2$ dělí 4, tedy $n = 1$. Dostáváme jedno řešení $(m, n) = (1, 1)$.
- ▷ $m = n+1$, pak $A = 4n^2+4n+1$, $B = 4n^2+4n+4 = A+3$. Číslo A dělí B, právě když $4n^2 + 4n + 1$ dělí 3. Ovšem pro kladná celá čísla n platí $4n^2 + 4n + 1 \geqq 4 + 4 + 1 = 9$, proto v tomto případě nemá úloha řešení.
- ▷ $m = n + 2$, pak $A = 4n^2 + 8n + 4$, $B = 4n^2 + 8n + 4$. Vidíme, že $A = B$, tedy každá dvojice $(m, n) = (n + 2, n)$ kladných celých čísel je řešením zadané úlohy.

Závěr. Úloze vyhovuje dvojice $(1, 1)$ a dále (s ohledem na symetrii neznámých m, n) rovněž každá z dvojic $(n + 2, n)$ a $(m, m + 2)$, kde m a n jsou libovolná kladná celá čísla.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za odvození nerovnosti $(m - n)^2 \leqq 4$. Dále udělte 1 bod za nalezení řešení $(1, 1)$ (1 bod strhněte za jeho opomenutí v jinak úplném řešení) a 2 body za nalezení všech zbývajících řešení. Za uvedení všech řešení bez jakéhokoliv zdůvodnění udělte však nejvýše 2 body.

4. Označme stěny krychle $S_1, S_2, \dots, S_6$ tak, že stěna S_1 je protilehlá stěně S_6, stěna S_2 je proti S_5 a S_3 je proti S_4. Číslo na stěně S_i označme c_i. Zřejmě libovolný vrchol krychle patří vždy právě jedné z dvojic protilehlých stěn. To znamená, že se v každém kroku zvětší o 1 i hodnota součtů $c_1 + c_6$, $c_2 + c_5$ a $c_3 + c_4$ čísel na protilehlých stěnách. Má-li tedy na konci platit $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6$, a tedy také

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4, \tag{1}$$

musejí být součty čísel na protilehlých stěnách krychle stejné už na počátku (a zůstanou stejné i po každém kroku).

Ukážeme, že podmínka (1) je zároveň postačující. Nechť tedy čísla na stěnách krychle splňují (1). Popíšeme posloupnost kroků, po nichž budou na všech stěnách krychle stejná čísla. Krok, v němž zvětšíme čísla na stěnách S_i, S_j, S_m, označme k_{ijm}. Bez újmy na obecnosti nechť $c_1 = p$ je největší ze šesti čísel na krychli. Nyní provedeme $(p - c_2)$-krát krok k_{246} a $(p - c_3)$-krát krok k_{356}. Dosáhneme tak toho, že na stěnách S_1, S_2, S_3 budou stejná čísla p. Díky podmínce (1) je teď i na stěnách S_4, S_5, S_6 totéž číslo, jehož hodnotu označme q. Pokud ještě není $p = q$, stačí nyní jen $(p-q)$-krát provést krok k_{456}, je-li $p > q$, resp. $(q - p)$-krát krok k_{123}, je-li $q > p$.

Naší úlohou je tedy určit počet takových množin $\mathsf{M} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ navzájem různých přirozených čísel, pro něž platí

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 60 \quad \text{a} \quad c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4.$$

Odtud plyne $3(c_1 + c_6) = 60$, tedy

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4 = 20. \tag{2}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme zřejmě předpokládat, že $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6$ neboli (vzhledem k rovnostem (2))

$$c_1 < c_2 < c_3 < 10 < c_4 < c_5 < c_6.$$

Přitom ke každé trojici (c_1, c_2, c_3) splňující $c_1 < c_2 < c_3 < 10$ zbylá čísla c_4, c_5, c_6 dopočteme z (2). Počet všech vyhovujících množin M je tedy roven počtu různých trojic přirozených čísel (c_1, c_2, c_3), jež vyhovují podmínce $c_1 < c_2 < c_3 < 10$, což je

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za nalezení a správné zdůvodnění nutné podmínky (1), za důkaz, že (1) je i postačující podmínkou, udělte 3 body. Další 2 body udělte za stanovení počtu množin M.