60. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Kořeny rovnice*

$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$

v oboru reálných čísel jsou čtyři po sobě jdoucí členy rostoucí aritmetické posloupnosti. Přitom jeden z těchto členů je zároveň řešením rovnice

$$bx^2 + ax + a = 1.$$

Určete všechny možné hodnoty reálných parametrů a, b.

Řešení. Vzhledem k tomu, že rostoucí aritmetickou posloupnost tvoří čtyři navzájem různá reálná čísla, musí mít první z daných rovnic čtyři různé reálné kořeny. Je proto $a \neq 0$.

Označme x_0 společný kořen obou rovnic. Pak je x_0 také kořenem rovnice, která vznikne odečtením druhé z daných rovnic od první, tj. rovnice $ax^4 - ax = 0$. Tu dále upravíme na tvar $ax(x^3 - 1) = 0$. Pro společný reálný kořen x_0 obou daných rovnic odtud plyne $x_0 = 0$ nebo $x_0 = 1$.

Dosazením $x_0 = 0$ do první z daných rovnic dostaneme $a = 1$, takže tato rovnice je tvaru $x^4 + bx^2 = 0$. Tato rovnice však pro žádné reálné číslo b nemá čtyři různé reálné kořeny (číslo 0 je jejím alespoň dvojnásobným kořenem), proto $x_0 \neq 0$.

Jediným společným kořenem obou rovnic je tudíž $x_0 = 1$. Dosazením této hodnoty do kterékoli z obou daných rovnic dostaneme $b = 1 - 2a$. První rovnici pak lze zapsat ve tvaru $ax^4 + (1 - 2a)x^2 + a - 1 = 0$, z něhož je patrné, že má i kořen -1, a po vytknutí součinu kořenových činitelů $(x - 1)(x + 1)$ dostaneme rovnici

$$(x - 1)(x + 1)(ax^2 - a + 1) = 0. \tag{1}$$

Kvadratický dvojčlen $ax^2 - (a - 1)$ má mít dva různé kořeny, kterými musí být dvě navzájem opačná (nenulová) čísla ξ a $-\xi$. To je splněno, právě když $(a - 1)/a > 0$, tj. právě když $a > 1$ nebo $a < 0$. Volíme-li značení tak, že $\xi > 0$, dostáváme pro aritmetickou posloupnost všech čtyř kořenů dvě možnosti podle toho, zda je $0 < \xi < 1$ nebo $\xi > 1$.

V prvním případě tvoří čtyři kořeny rovnice (1) aritmetickou posloupnost -1, $-\xi$, ξ, 1, která má zřejmě diferenci $\frac{2}{3}$, proto $\xi = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Toto číslo ξ je kořenem rovnice (1), právě když $a = 1/(1 - \xi^2) = \frac{9}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = -\frac{5}{4}$.

V druhém případě tvoří čtyři kořeny rovnice (1) aritmetickou posloupnost $-\xi$, -1, 1, ξ s diferencí 2, proto $\xi = 1 + 2 = 3$. Číslo 3 je kořenem rovnice (1), právě když $a = 1/(1 - 3^2) = -\frac{1}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = \frac{5}{4}$.

Závěr. Úloze vyhovují právě dvě dvojice reálných čísel (a, b), a to

$$(a, b) \in \left\{ \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{4} \right), \left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{4} \right) \right\}.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Určete všechny hodnoty reálných parametrů p a q, pro něž má každá z rovnic

$$x(x-p)=3+q, \qquad x(x+p)=3-q$$

v oboru reálných čísel dva různé kořeny, jejichž aritmetický průměr je jedním z kořenů zbylé rovnice. [59–B–S–1]

N2. Určete všechny dvojice (a,b) reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2+2bx+1=0, \qquad bx^2+2ax+1=0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný. [57–B–I–5]

N3. Určete všechny dvojice (a,b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^2+(3a+b)x+4a=0, \qquad x^2+(3b+a)x+4b=0$$

společný reálný kořen. [57–B–S–2]

D1. Určete všechny trojčlenné aritmetické posloupnosti prvočísel s diferencí 1970. [20–B–P–2]

D2. Uvažujme dvě kvadratické rovnice

$$x^2-ax-b=0, \qquad x^2-bx-a=0$$

s reálnými parametry a, b. Zjistěte, jaké nejmenší a jaké největší hodnoty může nabývat součet $a+b$, existuje-li právě jedno reálné číslo x, které současně vyhovuje oběma rovnicím. Určete dále všechny dvojice (a,b) reálných parametrů, pro něž uvažovaný součet těchto hodnot nabývá. [57–B–II–1]

D3. Reálná čísla a, b mají následující vlastnost: kvadratická rovnice $x^2-ax+b-1=0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2-ax+b+1=0$.
   a) Dokažte nerovnost $b>3$.
   b) Vyjádřete kořeny obou rovnic pomocí b.
   [59–B–I–6]

2. *Nechť k, n jsou přirozená čísla. Z platnosti tvrzení „číslo $(n-1)(n+1)$ je dělitelné číslem k“ Adam usoudil, že buď číslo $n-1$, nebo číslo $n+1$ je dělitelné k. Určete všechna přirozená čísla k, pro něž je Adamova úvaha správná pro každé přirozené n.*

Řešení. Ukážeme, že pro nesoudělná přirozená čísla r a s, kde $r>2$ a $s>2$, existuje přirozené číslo n s vlastností

$$r \mid n-1 \qquad \text{a} \qquad s \mid n+1.$$

Pro takové číslo n a číslo $k=rs$ není Adamova úvaha správná, protože z předpokladu, že číslo k dělí číslo $(n-1)(n+1)$, neplyne, že k dělí $n-1$ ani že k dělí $n+1$. Kdyby totiž $k=rs$ dělilo např. $n-1$, dělilo by číslo s obě čísla $n+1$ i $n-1$, což vzhledem k rovnosti $(n+1)-(n-1)=2$ není možné, neboť $s>2$.

Existenci čísla n z první věty řešení dokážeme tak, že uvážíme s čísel

$$2,\ r+2,\ 2r+2,\ \ldots,\ (s-1)r+2.$$

Ta dávají při dělení číslem s vesměs různé zbytky. Kdyby totiž některá dvě z nich, řekněme $ir+2$ a $jr+2$ $(0 \leqq i < j \leqq s-1)$, dávala při dělení číslem s stejný zbytek, potom by číslo s dělilo i jejich rozdíl $(i-j)r$, a vzhledem k nesoudělnosti čísel r a s tudíž i rozdíl $i-j$, což není možné, protože $|i-j|<s$. Uvedených s čísel tedy dává úplnou soustavu zbytků modulo s, proto mezi nimi existuje číslo, které při dělení číslem s dává

zbytek 0, nechť je to číslo $lr+2$. Potom ovšem pro číslo $n=lr+1$ platí, že r dělí $n-1$ a s dělí $n+1$.

Uvědomme si, že každé číslo k dělitelné dvěma lichými prvočísly se dá zapsat jako součin dvou nesoudělných čísel větších než 2. Adamova úvaha může být tedy správná pouze pro ta čísla k, která jsou dělitelná nejvýše jedním lichým prvočíslem. To znamená, že číslo k má jeden z následujících tří tvarů:

$$k = 2^s, \qquad k = p^t, \qquad k = 2p^t,$$

kde p je liché prvočíslo, s celé nezáporné a t přirozené číslo.

Nechť $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné číslo. Pro $s=0$ není Adamova úvaha správná, protože číslo $k = 2^0 = 1$ dělí každé přirozené číslo, tedy dělí obě čísla $n-1$ i $n+1$. Pro $s=1$ také není Adamova úvaha správná, protože pokud $k = 2^1 = 2$ dělí číslo $(n-1)(n+1)$, je jeden z činitelů sudý, ale pak je sudý i druhý činitel. Pro číslo $s=2$, tedy pro $k=2^2=4$ Adamova úvaha správná je. Pokud totiž 4 dělí číslo $(n-1)(n+1)$, je aspoň jeden z obou činitelů sudý, takže jde o dvě po sobě jdoucí *sudá* čísla, z nichž právě jedno je dělitelné čtyřmi. Konečně pro libovolné $s \geqq 3$ Adamova úvaha správná není, stačí vzít číslo $n = 2^{s-1}-1$.

Nechť $k = p^t$, kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo. Potom je Adamova úvaha správná, jelikož obě čísla $n-1$ a $n+1$ nemohou být současně dělitelná stejným lichým prvočíslem p, a proto je právě jedno z nich dělitelné číslem $p^t = k$.

Nechť $k = 2p^t$, kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo. Potom je Adamova úvaha také správná: obě čísla $n-1$ a $n+1$ jsou nutně sudá a přitom nemohou být současně dělitelná stejným lichým prvočíslem p, proto je právě jedno z nich dělitelné číslem $2p^t = k$.

Závěr. Adamova úvaha je správná pro každé přirozené číslo n pouze pro přirozená čísla k jednoho z tvarů

$$k = 4, \qquad k = p^t, \qquad k = 2p^t,$$

kde p je liché prvočíslo a t přirozené číslo.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Je-li číslo $(n-1)(n+1)$ dělitelné čtyřmi, je právě jeden z činitelů $n-1$, $n+1$ dělitelný čtyřmi. Dokažte.

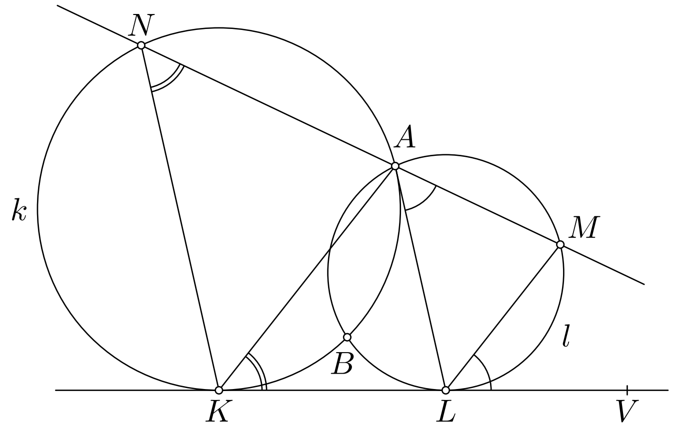
N2. Určete, pro která dvojmístná čísla n je n^3-n dělitelné stem. [50–C–S–3]

N3. Najděte všechna trojmístná čísla n taková, že poslední trojčíslí čísla n^2 je shodné s číslem n. [50–C–I–1]

N4. Kolik existuje přirozených čísel $x \leqq 1\,992\,000$ takových, že číslo $1\,992\,000$ dělí číslo x^3-x? [41–B–I–6]

3. *Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL.*

ŘEŠENÍ. Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětivě AK kružnice k plyne (obr. 1) $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle LKA|$ a podobně z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětivě AL kružnice l plyne $|\sphericalangle VLM| = |\sphericalangle LAM|$, kde jsme jako V označili nějaký bod polopřímky opačné k polopřímce LK.



Obr. 1

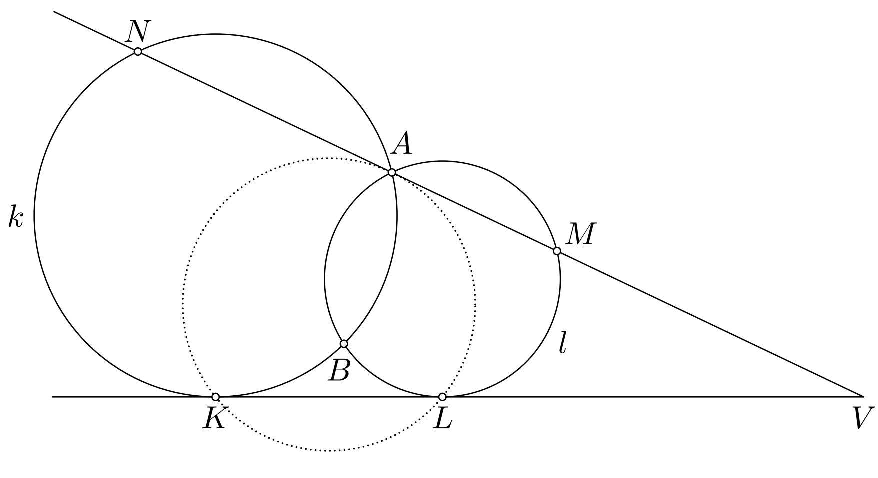
Čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když platí $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle VLM|$ neboli $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LAM|$. Poslední rovnost ovšem platí, právě když je LAM úsekovým úhlem příslušným obvodovému úhlu LKA tětivy LA kružnice opsané trojúhelníku AKL, tedy právě když je přímka MN tečnou této kružnice.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Vyřešme úlohu nejprve za předpokladu, že přímky KL a MN jsou rovnoběžné. V takovém případě jsou zřejmě oba trojúhelníky ANK a MAL rovnoramenné, protože osy stran AN, resp. MA procházejí odpovídajícím vrcholem K, resp. L (jinak bodem dotyku tečny rovnoběžné s tětivou AN, resp. MA kružnice k, resp. l). Je tedy $|LA| = |LM|$ a $|KN| = |KA|$. Přitom čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když je to rovnoramenný lichoběžník, tj. $|LM| = |KN|$. To podle předchozí dvojice rovností nastane, právě když je trojúhelník KLA rovnoramenný neboli právě když MN je tečnou jeho kružnice opsané ve vrcholu proti základně KL. (Vzhledem k tomu, že pak jsou trojúhelníky ANK a MAL shodné, uvedená situace nastane, právě když jsou kružnice k, l shodné.)

Předpokládejme dále, že přímky MN a KL jsou různoběžné, a označme V jejich průsečík (obr. 2). Užitím mocnosti bodu V ke kružnicím k a l dostaneme

$$|VK|^2 = |VA| \cdot |VN| \qquad \text{a} \qquad |VL|^2 = |VM| \cdot |VA|.$$



Obr. 2

Vynásobením obou vztahů obdržíme

$$|VK|^2 \cdot |VL|^2 = |VN| \cdot |VA|^2 \cdot |VM|. \tag{1}$$

Čtyřúhelník $KLMN$ je ovšem tětivový, právě když platí (viz návodnou úlohu N1)

$$|VK| \cdot |VL| = |VN| \cdot |VM|$$

neboli — s přihlédnutím k (1) — právě když platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VA|^2.$$

Poslední rovnost ovšem platí, právě když přímka MN (procházející bodem A) je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

Zopakujte si nejdříve učebnicové poznatky o obvodovém, středovém a úsekovém úhlu i s jejich důkazy. Připomeňte si rovněž vlastnost všech sečen dané kružnice jdoucích daných bodem, jež je vyjádřena mocností bodu ke kružnici.

N1. Přímky KL a MN se protínají v bodě V, který leží buď uvnitř, nebo vně obou úseček KL a MN. Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici, právě když platí $|VK| \cdot |VL| = |VM| \cdot |VN|$. [Uvažte mocnost bodu V ke kružnici opsané trojúhelníku KLM a posuďte, kdy druhý průsečík N' této kružnice s přímkou VM splývá s bodem N.]

N2. V rovině je dána přímka p a body A, B ($A \neq B$), které leží v téže polorovině vyťaté přímkou p. Sestrojte kružnici, která prochází body A, B a dotýká se přímky p. [Uvažujte přímku q, na níž leží body A, B, a využijte mocnost jejího průsečíku s p k hledané kružnici.]

N3. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD jako průměrem a kružnice k_2, která prochází vrcholy B a C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné. [52–B–I–5]

N4. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]

D1. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. [53–A–III–5]

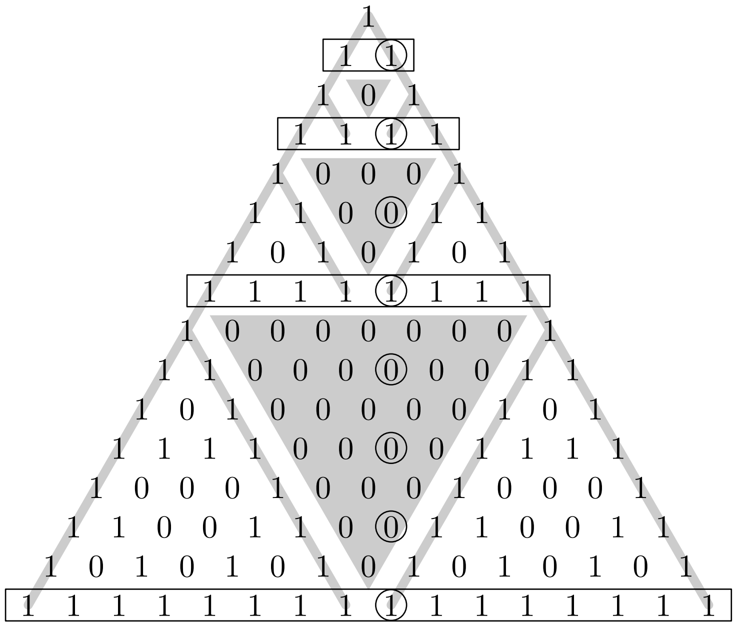
4. *Mějme $6n$ žetonů až na barvu shodných, po třech od každé z $2n$ barev. Pro každé přirozené číslo $n > 1$ určete počet p_n všech rozdělení takových $6n$ žetonů na dvě hromádky po $3n$ žetonech, kdy žádné tři žetony téže barvy nejsou ve stejné hromádce. Dokažte, že p_n je liché číslo, právě když $n = 2^k$ pro vhodné přirozené k.*

Řešení. Žádné tři žetony téže barvy neleží na jedné hromádce, tedy na každé z hromádek leží alespoň jeden žeton zvolené barvy. Každé vyhovující rozdělení žetonů do hromádek je pak charakterizováno tím, na které z nich leží právě jeden ze tří žetonů té které barvy.

Předpokládejme, že v jedné z hromádek je právě l barev zastoupeno jedním žetonem a zbylých $2n-l$ barev dvěma. Jednoduchým výpočtem $l+2(2n-l) = 3n$ ovšem zjistíme, že toho lze dosáhnout jen při $l = n$. Proto je zkoumaný počet p_n roven počtu rozdělení $2n$ žetonů navzájem různých barev na dvě (neuspořádané) skupiny po n žetonech, tedy

$$p_n = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2(n!)^2} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{2n \cdot (n-1)!\, n!} = \binom{2n-1}{n}. \tag{1}$$

Naší úlohou tak je dokázat, že poslední kombinační číslo je liché, právě když je číslo n mocnina dvou. Tento poznatek (a vlastně i metodu jeho důkazu) lze vypozorovat z dobře známého schématu všech kombinačních čísel v podobě Pascalova trojúhelníku:



V našem schématu ovšem nejsou samotná kombinační čísla, nýbrž jejich zbytky 0 či 1 při dělení dvěma. K jejich určení není nutné kombinační čísla vůbec počítat, protože z rekurentních vzorců

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{a} \quad \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \quad (1 \leqq i \leqq n-1) \tag{2}$$

můžeme postupně po jednotlivých řádcích namísto kombinačních čísel rovnou psát jejich zbytky při dělení jakýmkoliv pevným číslem, v našem případě číslem 2.

Všimněme si, co naše schéma napovídá. Některé řádky (vyznačené obdélníčky) jsou sestaveny ze samých jednotek. Díky rekurentním vzorcům (2) pod každým takovým řádkem zřejmě vznikne trojúhelník sestavený ze samých nul (tři takové trojúhelníky jsou vyznačeny šedým podtiskem) a olemovaný zleva i zprava samými jednotkami; bezprostředně pod ním opět leží řádek ze samých jedniček. Protože zbytky všech zkoumaných čísel $\binom{2n-1}{n}$ (v našem schématu vyznačených kroužky) leží v popsaných obdélníčcích nebo trojúhelnících, bude takové kombinační číslo liché, právě když bude mít pozici v některém obdélníčku.

Naše pozorování nyní popíšeme přesněji a rovnou je ověříme matematickou indukcí.

Řádky ze samých jedniček jsou právě řádky s kombinačními čísly $\binom{n-1}{i}$ $(0 \leqq i \leqq$ $\leqq n-1)$, *kde* n *je tvaru* $n = 2^k$. Tvrzení triviálně platí pro $k = 1$. Předpokládejme tedy, že platí pro nějaké $k \geqq 1$, a označme P_n prvních $n = 2^k$ řádků schématu. Dalších n řádků si můžeme představit jako tři rovnostranné trojúhelníky čísel: první a třetí s n řádky jsou téže velikosti jako P_n, mezi nimi je pak $(n-1)$-řádkový trojúhelník (vrcholem dolů), který je díky jednotkám v základně trojúhelníku P_n a rekurentním vzorcům (2) sestaven ze samých nul. Proto mají první a třetí trojúhelník jednotky nejen v horních vrcholech a na stranách ležících na hranici celého schématu, ale i na stranách, kterými se přimykají k druhému trojúhelníku, tedy na začátku i konci každého ze svých n řádků. Plyne to opět ze vzorců (2), které pak ovšem vedou k dalšímu, pro nás hlavnímu závěru:

První a třetí trojúhelník jsou totožné s trojúhelníkem P_n. Můžeme tedy shrnout, že každý z $n-1$ přidaných řádků obsahuje aspoň jednu nulu, zatímco n-tý řádek (složený ze dvou n-tých řádků trojúhelníku P_n) obsahuje samé jedničky. Tvrzení tudíž platí i pro $2n = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ řádků Pascalova trojúhelníku modulo 2, tj. i pro číslo $k+1$.

Číslo p_n je tedy skutečně liché, právě když n je mocnina dvou.

Jiné řešení. Počet p_n požadovaných rozdělení žetonů určíme stejně jako v původním řešení vzorcem

$$p_n = \frac{(2n)!}{2(n!)^2},$$

který dále upravíme na tvar

$$p_n = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)(2n)}{2(n!)^2} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^n n!}{2(n!)^2} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^{n-1}}{n!}. \tag{3}$$

Pro nejvyšší mocninu 2^a, která dělí $n!$, platí (viz návodnou úlohu N1)

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor,$$

kde $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ a $\lfloor x \rfloor$ značí *dolní celou část čísla* x, tedy největší celé číslo, které není větší než x. Odtud pro exponent a plyne odhad

$$a \leqq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^m} = n\Big(1 - \frac{1}{2^m}\Big) = n - \frac{n}{2^m} \leqq n - 1.$$

Z vyjádření (3) tedy vidíme, že číslo p_n je liché, právě když $a = n-1$ neboli n je tvaru 2^m.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Odvoďte tzv. Legendreovu formuli: Nejvyšší mocnina prvočísla p, která dělí $n!$, má stupeň rovný součtu

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

[Uvažte, že první sčítanec je roven počtu těch čísel od 1 do n, jež jsou dělitelná číslem p, druhý sčítanec je roven počtu takových čísel, jež jsou dělitelná nejen p, ale i p^2 atd. Do daného součtu tudíž každé z čísel od 1 do n přispěje právě tolikrát, kolikrát je prvočíslo p zastoupeno v jeho rozkladu na prvočinitele.]

N2. Určete, kolika nulami končí zápis čísla 2 010!. [501]

D1. O tom, zda zadané kombinační číslo $\binom{n}{k}$, kde $0 \leqq k \leqq n$, je sudé či liché, lze jednoduše rozhodnout pomocí číslic c_i, d_i z dvojkových zápisů parametrů n a k:

$$n = c_0 + c_1 2^1 + c_2 2^2 + c_3 2^3 + \ldots, \qquad k = d_0 + d_1 2^1 + d_2 2^2 + d_3 2^3 + \ldots$$

Pomocí Legendreovy formule dokažte takové kritérium: číslo $\binom{n}{k}$ je liché, právě když pro každý index $i \geqq 0$ platí $c_i \geqq d_i$. Pak odvoďte jeho dva důsledky:

a) Všechna kombinační čísla $\binom{n}{k}$ s daným n a $k \in \{0, \ldots, n\}$ jsou lichá, právě když je číslo $n+1$ mocninou čísla 2.

b) Počet těch kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ s daným n a $k \in \{0, \ldots, n\}$, jež jsou lichá, je mocninou čísla 2 pro každé n.

[Podle Legendreovy formule je číslo $\binom{n}{k}$ liché, právě když ve všech obecně platných nerovnostech

$$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{2^i} \right\rfloor \geqq 0 \quad (i \in \mathbb{N})$$

nastane rovnost. Po dosazení dvojkových zápisů do těchto rovností dostaneme po úpravě ekvivalentní soustavu

$$\left\lfloor \frac{(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)2 + \ldots + (c_{i-1} - d_{i-1})2^{i-1}}{2^i} \right\rfloor = 0 \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Ta je zřejmě splněna, právě když je součet

$$(c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)2 + \ldots + (c_i - d_i)2^i$$

nezáporný pro každé $i \geqq 0$, tedy právě když se celý výpočet rozdílu $n - k$ v dvojkové soustavě odehraje v jednotlivých řádech samostatně. Dále uvažte, že takto proběhne odčítání $n - k$ pro každé k, právě když je číslo n zapsáno skupinou jedniček. Konečně při obecném n je počet rozdílů $n - k$ s takovým průběhem výpočtu zřejmě roven 2^j, kde j je počet jedniček v zápisu n.]

5. *Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla.*

Řešení. V každém kroku se součet všech čísel na stěnách krychle zvětší o 2, jeho parita se tedy nezmění. Jsou-li na všech stěnách krychle stejná čísla, je jejich součet násobkem šesti, a je tudíž dělitelný dvěma. Nutnou podmínkou k tomu, abychom tohoto stavu dosáhli, tedy je, aby i na počátku byl součet všech čísel na stěnách krychle dělitelný dvěma.

Tato podmínka je zároveň postačující. Předpokládejme, že součet všech šesti celých čísel na stěnách krychle je na počátku dělitelný dvěma. Ukážeme, jak po určitém počtu kroků dosáhnout toho, že na všech stěnách krychle budou stejná čísla.

Označme stěny krychle $S_1, S_2, \ldots, S_6$, přičemž stěna S_1 je proti stěně S_6, stěna S_2 proti S_5 a S_3 proti S_4.[1] Krok, v němž zvětšíme čísla na stěnách S_i, S_j, budeme značit k_{ij}. A protože nás zajímá jen relativní hodnota očíslování stěn, tj. zda a o kolik se liší od nejmenší hodnoty všech šesti čísel, budeme dále pracovat jen s těmito relativními hodnotami (což budou nezáporná celá čísla s nejmenší hodnotou 0).

Posloupností kroků k_{12}, k_{23}, k_{35}, k_{54}, k_{41} zajistíme, že se číslo na každé stěně kromě stěny S_6 zvětší o 2, což vzhledem k naší úmluvě vlastně znamená, že jsme (relativní) hodnotu čísla na stěně S_6 o 2 zmenšili. Podobným způsobem můžeme o 2 „zmenšit“ číslo na libovolné stěně krychle. Je tedy zřejmé, že popsaným způsobem dosáhneme toho, že (relativní) hodnoty čísel na stěnách budou jen 0 nebo 1, nula mezi nimi ovšem musí být aspoň jedna (podle významu relativních hodnot). Nyní již stačí prošetřit následující možnosti (připomeňme, že součet všech šesti čísel je sudý):

a) Na stěnách krychle jsou vesměs 0; tvrzení pak platí triviálně.

b) Na stěnách krychle jsou právě dvě 1 (na ostatních 0). Bez ohledu na to, zda jsou obě jedničky na sousedních či protilehlých stěnách, vždy můžeme rozdělit zbývající čtyři stěny s nulami na dvě dvojice sousedních stěn a ve dvou krocích zvětšit jejich čísla o 1.

c) Na stěnách krychle jsou právě čtyři 1 (na zbývajících dvou stěnách jsou 0). Tento případ vyřešíme tak, že nejprve snížíme (způsobem popsaným výše) hodnotu každé stěny s jedničkou o dva, čímž ovšem (v relativních hodnotách) dostaneme přesně situaci popsanou v b).

[1] Podobně jsou očíslovány i stěny běžné hrací kostky: součet bodů na protilehlých stěnách dává 7.

Závěr. Dosáhnout toho, že po konečném počtu kroků budou na všech stěnách krychle napsána stejná čísla, lze, právě když je součet (celých) čísel na všech šesti stěnách krychle dělitelný dvěma.

Poznámka. Část c) předchozího řešení lze vyřešit i takto: Jsou-li obě 0 na sousedních stěnách, můžeme je jediným krokem zvětšit na 1. Jsou-li obě 0 na protilehlých stěnách (bez újmy na obecnosti nechť jsou to např. S_1 a S_6), pomocí kroků k_{12}, k_{36}, k_{15}, k_{46}, dosáhneme toho, že na všech stěnách krychle budou napsána čísla 2.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno číslo, přičemž všechna čísla nejsou stejná. V jednom kroku čísla na každé stěně krychle nahradíme aritmetickým průměrem stávajících čísel na všech čtyřech sousedních stěnách. Rozhodněte, zda po několika krocích mohou být na stěnách krychle opět původní čísla. [Ne. Označme M největší z čísel. Pokud M po prvním kroku ze stěn zmizí, už se na nich nikdy neobjeví. Pokud nezmizí, bude po prvním kroku na právě dvou stěnách a zmizí po druhém kroku.]

N2. Na tabuli jsou napsána celá nezáporná čísla od 0 do 1 234. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich napíšeme na tabuli jejich rozdíl (od většího čísla odečteme menší). Tuto operaci opakujeme, dokud na tabuli nezůstane poslední číslo. Může na tabuli zůstat číslo 2? [Ne. Uvedenou operací se nemění parita součtu všech čísel napsaných na tabuli, který je v tomto případě lichý.]

N3. Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Můžeme tímto způsobem nakonec získat tři po sobě jdoucí čísla? [Součet tří po sobě jdoucích čísel je dělitelný třemi, kdežto neměnný součet všech čísel na tabuli dělitelný třemi není.]

N4. Na stole je n pohárů, všechny jsou postaveny dnem vzhůru. V jednom kroku smíme otočit libovolných k pohárů naopak (k je dané, neměnné). Je možné, aby po konečném počtu kroků bylo všech n pohárů postaveno dnem dolů? Řešte nejprve pro $n = 9$ a $k = 5$, potom pro $n = 9$ a $k = 4$. [Pro $n = 9$ a $k = 5$ to zřejmě možné je. Pro $n = 9$ a $k = 4$ to možné není, protože obecněji platí: při sudém k a libovolném n se nemění parita počtu pohárů postavených dnem vzhůru (tj. tento počet je buď neustále sudý, nebo lichý).]

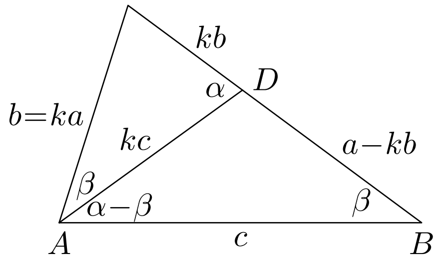
N5. Je dáno n ($n \geqq 2$) přirozených čísel, s nimiž můžeme provést následující operaci: vybereme několik z nich, ale ne všechna a nahradíme je jejich aritmetickým průměrem. Zjistěte, zda je možno pro libovolnou počáteční n-tici dostat po konečném počtu kroků všechna čísla stejná, jestliže n se rovná a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17. [51–B–I–4]

6. *Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC s ostrým úhlem při vrcholu C (při obvyklém označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů) platí nerovnost*

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leqq 2ab.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

Je-li $a = b$, je $\alpha = \beta$, takže $\cos(\alpha - \beta) = 1$ a dokazovaná nerovnost platí jako rovnost $a^2 + a^2 = 2a^2$ (dodejme, že bez ohledu na to, zda je úhel γ ostrý či nikoliv). Protože dokazovaná nerovnost je symetrická v a, b (kosinus je sudá funkce), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a > b$ neboli $\alpha > \beta$.



Obr. 3

Protože $\alpha > \beta$, lze úhel BAC velikosti α rozdělit pomocí bodu $D \in BC$ na dva úhly CAD a DAB velikostí β, a $\alpha - \beta$ (obr. 3). Trojúhelník DAC je pak zmenšením trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $k = b : a$, takže $|AD| = bc/a$ a $|DC| = b^2/a$, odkud $|BD| = |BC| - |DC| = (a^2 - b^2)/a$.

Vyjádření $|AD|$, $|BD|$ dosadíme do rovnosti z kosinové věty pro trojúhelník ABD a upravíme:

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB||AD|\cos(\alpha-\beta),\\
\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2} &= c^2 + \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2bc^2\cos(\alpha-\beta)}{a},\\
(a^2-b^2)^2 &= \delta\cdot c^2, \quad \text{kde} \quad \delta = a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta) > 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

(Poslední nerovnost plyne z toho, že pro $\alpha \neq \beta$ je $\cos(\alpha-\beta) < 1$.) Vztah (1) spolu s rovností $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ nyní využijeme k úpravě rozdílu Δ pravé a levé strany dokazované nerovnosti, který navíc ještě vynásobíme výrazem $2ab$:

$$\begin{aligned}
2ab\Delta &= 2ab\bigl(2ab-(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta)\bigr) = 4a^2b^2-(a^2+b^2)\cdot 2ab\cos(\alpha-\beta) =\\
&= 4a^2b^2-(a^2+b^2)(a^2+b^2-\delta) = \delta(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2 =\\
&= \delta(a^2+b^2)-\delta\cdot c^2 = \delta(a^2+b^2-c^2) = \delta\cdot 2ab\cos\gamma,
\end{aligned}$$

Po vydělení výrazem $2ab$ dostáváme vztah $\Delta = \delta\cos\gamma$, takže s ohledem na $\delta > 0$ má výraz Δ stejné znaménko jako $\cos\gamma$ (zopakujme, že za předpokladu $a \neq b$). Odtud plyne, že v případě, kdy $\gamma < 90°$ a $a \neq b$, platí nerovnost ze zadání úlohy jako *ostrá*. Tím je úloha vyřešena a odpověď na její závěrečnou otázku zní: v dokázané nerovnosti (v zadané situaci, tj. při ostrém úhlu γ) nastane rovnost, právě když $a = b$.

Poznámka 1. Odvozený vztah $\Delta = \delta\cos\gamma$ se bez pomocných označení přepíše jako identita

$$2ab-(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) = \bigl(a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta)\bigr)\cos\gamma, \qquad (2)$$

která platí pro *libovolný* trojúhelník ABC (k našemu odvození stačí přidat triviální ověření rovnosti (2) v případě $a = b$). Výsledek (2) umožňuje snadnou diskusi o jednotlivých případech relace

$$(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) \lesseqqgtr 2ab,$$

neboť první činitel v pravé straně (2) je vždy nezáporný:

$$a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta) \geqq a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geqq 0.$$

Relace dopadá takto: rovnost nastane, právě když $a = b$ nebo $\gamma = 90°$; v případě $a \neq b$ pak platí ostrá nerovnost $<$ či $>$ podle toho, zda je $\gamma < 90°$ nebo $\gamma > 90°$.

Jiné řešení. Původní řešení je celé založeno na vztahu (1), proto jeho odlišné odvození nyní uvedeme jako „jiné řešení“. Tvar kladného výrazu δ v (1) je motivací k úvaze o pomocném trojúhelníku, jehož dvě strany mají délky a, b a svírají úhel velikosti $\alpha-\beta$ (opět předpokládáme, že $a > b$). Nás zajímá délka jeho třetí strany, kterou označíme d, takže pro výraz δ ve vztahu (1), který se chystáme dokázat, budeme mít $\delta = d^2$. Ukažme, že takový trojúhelník o stranách a, b, d je — vedle původního trojúhelníku o stranách a, b, c — druhým řešením úlohy *sestrojit trojúhelník ABC, jsou-li dány strany a, b a úhel β*. Konstrukci obou řešení A_1BC a A_2BC vidíme na obr. 4. Součet úhlů při vrcholech A_1 a A_2 (vyznačených obloučky) je zřejmě $180°$. V jednom z trojúhelníků je to úhel α, ve druhém tedy úhel $180°-\alpha$, takže úhel při vrcholu C druhého trojúhelníku je právě $\alpha-\beta$, jak jsme si přáli.[2] Úsečky A_1B, A_2B tedy mají (v některém pořadí)

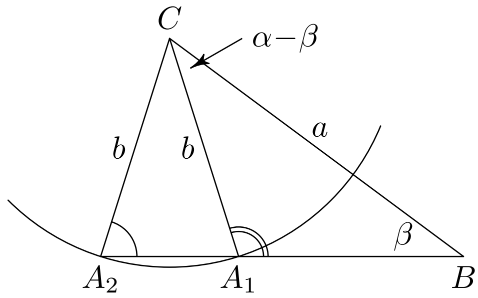
[2] V případě $\alpha = 90°$ sice platí $A_1 = A_2$, avšak na celé naší úvaze není třeba nic měnit: tehdy totiž $\alpha-\beta = \gamma$ a $c = d$.

délky c a d. Z mocnosti bodu B k sestrojené kružnici o středu C a poloměru b vyplývá rovnost

$$cd = a^2 - b^2, \tag{3}$$

z níž po umocnění na druhou dostáváme $c^2d^2 = (a^2 - b^2)^2$. A to je kýžený klíčový vztah (1) z původního řešení, neboť jak už jsme naznačili, podle kosinové věty platí

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta). \tag{4}$$



Obr. 4

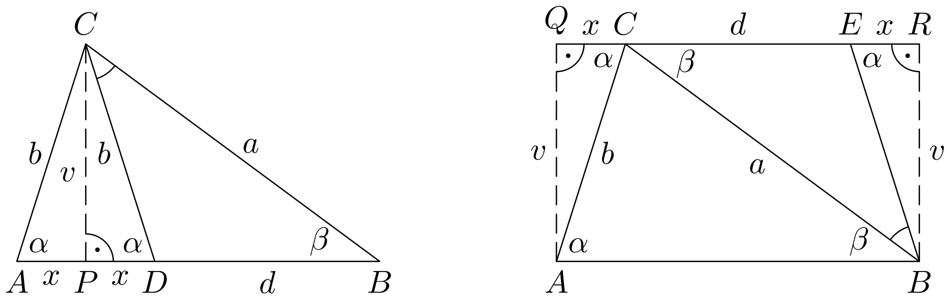
Poznámka 2. V původním řešení jsme ze vztahu (1) odvodili identitu zapsanou v Poznámce 1 jako (2). Právě uvedený alternativní důkaz (1) s využitím konstrukční úlohy (a, b, β) má zajímavý důsledek: díky „rovnoprávnosti" obou řešení z obr. 4 musí platit i identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha - \beta). \tag{5}$$

získaná z (2) výměnou rolí trojúhelníků s trojicemi stran (a, b, c) a (a, b, d) a uvedená v doplňující úloze D1, v jejímž návodu naznačujeme odlišné trigonometrické odvození.

Další řešení. Pomocný trojúhelník se stranami a, b $(a > b)$ svírajícími úhel $\alpha - \beta$ a třetí stranou d danou vztahem (4) lze využít k řešení úlohy i bez objevu „mocnostní" rovnosti (3) následujícím postupem, který může být blízký řešitelům, a proto ho popisujeme i v návodné úloze N1.

Zmíněný trojúhelník lze k trojúhelníku ABC vhodně přikreslit dvěma způsoby patrnými z obr. 5. Vlevo je to trojúhelník BCD (ten známe už z předchozího řešení), vpravo



Obr. 5

to je trojúhelník BCE; snadno pak ověříme, že oba vyznačené úhly BCD a CBE mají požadovanou velikost $\alpha - \beta$.[3] Pomocí délky d ze vztahu (4) nyní upravíme dokazovanou

[3] Oba obrázky odpovídají případu $\alpha < 90°$, v úplném řešení by neměl chybět obrázek pro případ $\alpha \geqq 90°$, který zde posuzovat nebudeme, protože další postup vyžaduje jen nepatrnou obměnu.

(ostrou) nerovnost:

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) &< 2ab,\\
(a^2+b^2)\cdot 2ab\cos(\alpha-\beta) &< 4a^2b^2,\\
(a^2+b^2)(a^2+b^2-d^2) &< 4a^2b^2,\\
(a^2-b^2)^2 &< (a^2+b^2)d^2. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Nakonec využijeme Pythagorovu větu pro dvojice pravoúhlých trojúhelníků z obr. 5; v obou variantách jak s trojúhelníkem BCD, tak s trojúhelníkem BCE pak platí

$$a^2=(d+x)^2+v^2 \quad \text{a} \quad b^2=x^2+v^2,$$

takže $a^2-b^2=d^2+2dx=d(d+2x)$. Po dosazení do levé strany nerovnosti (6) a zkrácení výrazem d^2 dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(d+2x)^2<a^2+b^2 \quad \text{neboli} \quad c^2<a^2+b^2,$$

která (díky kosinové větě) přesně vyjadřuje podmínku $\gamma<90^\circ$ ze zadání úlohy. Tím je celé její řešení hotovo, protože v případě $a=b$ zřejmě v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

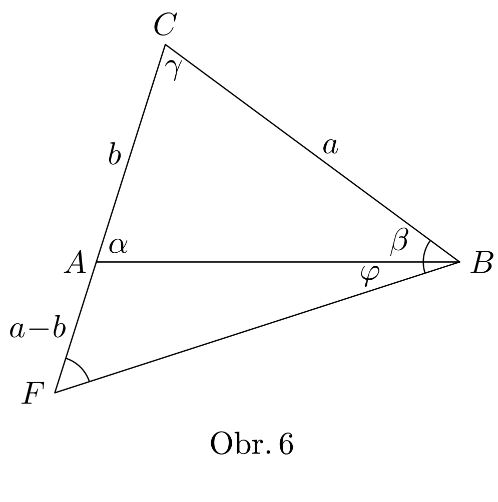
Další řešení. Ještě jedním způsobem za předpokladů $\gamma<90^\circ$ a $a>b$ (neboli $\alpha>\beta$) dokážeme ostrou nerovnost

$$(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta)<2ab.$$

Nejprve ji ekvivalentně upravíme, když položíme $\varphi=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)>0$ a využijeme vzorec $\cos 2\varphi=1-2\sin^2\varphi$:

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)(1-2\sin^2\varphi) &< 2ab,\\
(a-b)^2 &< 2(a^2+b^2)\sin^2\varphi,\\
2\cdot\left(\frac{a-b}{2\sin\varphi}\right)^2 &< a^2+b^2.
\end{aligned}
$$

To je (podle sinové věty) nerovnost $2r^2<a^2+b^2$ pro poloměr r kružnice opsané libovolnému trojúhelníku se stranou $a-b$ a protilehlým vnitřním úhlem φ. Takový trojúhelník dostaneme, když jako na obr. 6 stranu CA trojúhelníku ABC prodloužíme za bod A



Obr. 6

do bodu F tak, aby platilo $|CF| = a$ $(a > b)$. Potom má trojúhelník ABF stranu AF délky $a - b$ s protilehlým úhlem ABF, jehož velikost určíme takto: rovnoramenný trojúhelník BCF má při základně BF shodné úhly $90° - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, takže

$$|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBF| - |\sphericalangle CBA| = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \varphi.$$

Proto je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABF skutečně roven zkoumané hodnotě r. Pro ni tak získáme z předpokladu $\gamma < 90°$ odhad

$$r = \frac{|AB|}{2\sin|\sphericalangle AFB|} = \frac{c}{2\sin(90° - \frac{1}{2}\gamma)} < \frac{c}{2\sin 45°} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

neboli $2r^2 < c^2$; ze stejného předpokladu $\gamma < 90°$ ovšem vyplývá (díky kosinové větě pro trojúhelník ABC) další nerovnost $c^2 < a^2 + b^2$. Dohromady dostáváme $2r^2 < c^2 <$ $< a^2 + b^2$ a kýžená nerovnost $2r^2 < a^2 + b^2$ je tak dokázána.

Dodejme ještě, že v případě $\gamma > 90°$ ze stejných důvodů platí $2r^2 > c^2 > a^2 + b^2$, což (za předpokladu $a \neq b$) dokazuje opačnou nerovnost

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) > 2ab.$$

Poslední řešení. Uvedeme ještě jedno trigonometrické řešení. Pro libovolný trojúhelník ABC platí totiž tzv. *Mollweidův vzorec*

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

o kterém pojednává návodná úloha N2 a ze kterého plyne následující vyjádření hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2} = 1 - \frac{2(a - b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}.$$

Dosazením do levé strany dokazované nerovnosti dostaneme

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leqq 2ab,$$

$$(a^2 + b^2)\left(1 - \frac{2(a - b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}\right) \leqq 2ab,$$

$$(a - b)^2 \leqq \frac{2(a^2 + b^2)(a - b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}.$$

Vidíme, že v případě $a = b$ nastane rovnost. V případě $a \neq b$ po dělení kladným výrazem $(a - b)^2$ a další zřejmé ekvivalentní úpravě dostaneme

$$c^2 \leqq 2(a^2 + b^2)\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Dosadíme-li sem z rovností

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{a} \quad 2\cos^2\frac{\gamma}{2} = 1 + \cos\gamma,$$

dostaneme po odečtení součtu $a^2 + b^2$ od obou stran nerovnost

$$-2ab\cos\gamma \leqq (a^2 + b^2)\cos\gamma \quad \text{neboli} \quad 0 \leqq (a + b)^2\cos\gamma,$$

což díky zadanému předpokladu $\gamma < 90°$ skutečně platí jako ostrá nerovnost. Tím je nerovnost ze zadání úlohy dokázána; rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.[4]

[4] I při tomto postupu lze odvodit obecnější závěry uvedené v Poznámce 1 za prvním řešením.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nejprve uvažte, jak k danému trojúhelníku ABC, ve kterém platí $a > b$ a $\gamma < 90°$, vhodně přikreslit trojúhelník s dvěma stranami a, b, které by svíraly úhel $\alpha-\beta$. Označte d délku třetí strany takového trojúhelníku a ukažte, že nerovnost ze zadání soutěžní úlohy je ekvivalentní s nerovností $(a^2 - b^2)^2 \leqq (a^2 + b^2)^2 d^2$. Tu pak dokažte tak, že do levé strany dosadíte vyjádření přepon a, b ve vhodných pravoúhlých trojúhelnících pomocí Pythagorovy věty. [Celý postup je podrobně popsán v celkově třetím řešení soutěžní úlohy.]

N2. Pro obecný trojúhelník ABC dokažte tzv. Mollweidův vzorec

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

s jehož pomocí lze rovněž vyřešit zadanou soutěžní úlohu. [Mollweidův vzorec je triviální v případě $a = b$; v případě $a > b$ užijte sinovou větu pro trojúhelník ABF, kde F je bod vybraný na prodloužení strany CA za bod A tak, že platí $|AF| = a - b$; případ $a < b$ lze převést na předchozí záměnou stran a a b. Řešení soutěžní úlohy pomocí Mollweidova vzorce je v našem textu uvedeno jako poslední.]

D1. Pro obecný trojúhelník ABC dokažte rovnost

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha-\beta).$$

[S využitím rovnosti $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\gamma$ lze dokazovaný vzorec upravit do tvaru $2ab\sin^2\gamma = c^2(\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma)$. Ukažte dále, že platí $\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta$, a pak využijte, že rovnost $ab\sin^2\gamma = c^2\sin\alpha\sin\beta$ je důsledek sinové věty.]

D2. Pro obecný trojúhelník ABC dokažte druhý Mollweidův vzorec

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

který spolu s prvním Mollweidovým vzorcem z úlohy N2 vede k rovnosti

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

označované spolu s dalšími dvěma analogickými rovnostmi pro dvojice stran a, c a b, c jako tangentová věta pro trojúhelník ABC. [Užijte sinovou větu pro trojúhelník ABG, kde bod G leží na prodloužení strany BC za bod C tak, že $|BG| = a + b$. K odvození tangentové věty porovnejte podíl levých a podíl pravých stran obou Mollweidových vzorců a k tomu uvažte, že $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$.]