

OSTRAVSKÁ UNIVERZITA V OSTRAVĚ

---

**SBÍRKA ÚLOH K MATEMATICKÉ  
OLYMPIÁDĚ**

kolektiv autorů



---

**Ostrava 2009**

Tento produkt vznikl za podpory decentralizovaného Rozvojového projektu  
MŠMT "Podpora zájmu mládeže o přírodovědné, matematické a informatické  
obory"

Název: Sbírka úloh k matematické olympiádě  
Autor: Mgr. Petr Otipka, RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.,  
Doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D., RNDr. Jahoda Pavel, Ph.D.,  
Mgr. Petr Kovář, Ph.D., RNDr. Michael Kubesa, Ph.D.,  
RNDr. Marek Lampart, Ph.D., Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.  
  
Vydání: první  
Počet stran: 64  
Vydavatel: Ostravská univerzita v Ostravě

© P. Otipka, M. Vavroš, J. Bouchala, P. Jahoda, P. Kovář, M. Kubesa, M. Lampart,  
P. Vodstrčil  
© Ostravská univerzita v Ostravě

# **O B S A H**

|                                        |           |
|----------------------------------------|-----------|
| Úvod.....                              | <b>1</b>  |
| Návody k řešení úloh kategorie A ..... | <b>2</b>  |
| Návody k řešení úloh kategorie B.....  | <b>29</b> |
| Návody k řešení úloh kategorie C.....  | <b>47</b> |

# Úvod

Tato sbírka návodných úloh a komentářů má pomoci studentům při řešení soutěžních úloh domácího kola 59. ročníku matematické olympiády kategorie A, B a C. Rovněž by měla být výchozím studijním materiálem jak pro přípravu na školní část prvního kola tak pro účastníky krajské kolo. Dále může sloužit k procvičení vybraných partií matematiky, pro práci s talentovanými žáky jako rozšiřující učivo. Všechny úlohy jsou okomentovány a vyřešeny, v některých případech je podán stručný výklad nezbytné teorie. Většina použitých úloh pochází z textů vydaných Jednotou českých matematiků a fyziků k 59. ročníku MO.

Sbírka vznikla za pomoci Přírodovědecké fakulty Ostravské univerzity. Je rozdělena do tří částí, které korespondují s jednotlivými kategoriemi matematické olympiády. První kapitola je určena studentům soutěžících v kategorii A, kteří jsou v maturitním nebo předmaturitním ročníku. Jejím autorem je kolektiv pracovníků Katedry aplikované matematiky Fakulty elektrotechniky a informatiky Vysoké školy báňské - Technické univerzity v čele s garantem kategorie A a členem krajské komise matematické olympiády Doc. Jiřím Bouchalou, PhD. Druhá kapitola je zaměřena na kategorii B a jejím autorem je člen katedry matematiky VŠB TU Mgr. Petr Otipka, člen krajské komise matematické olympiády a garant kategorie B. Třetí a poslední část je určena studentům prvních ročníků středních škol soutěžících v kategorii C. Jejím autorem je RNDr. Michal Vavroš, Ph.D. z Wichterlova gymnázia, člen krajské komise matematické olympiády a garant kategorie C pro Moravskoslezský kraj.

Každá část sbírky obsahuje řešené příklady a nezbytné komentáře, které mají navést studenty k úspěšnému vyřešení soutěžních úloh. Sbírka si neklade za cíl vyčerpávajícím způsobem podat řešení zadaných úloh nebo obsáhnout výklad veškeré teorie nutné ke snadnému vyřešení úloh. Tento soubor úloh má snahu ukázat cestu k řešení jednotlivých soutěžních úloh, poukázat na některé problémy související s danou oblastí matematiky. Měl by sloužit jako rozšiřující studijní materiál a zásobárna úloh k procvičení při práci s talentovanými studenty a zájemci o matematiku.

Sbírka neprošla jazykovou korekcí a nemá jednotný formát jednotlivých částí. Ve své podstatě každá kapitola představuje samostatnou část zaměřenou na daný typ úloh příslušné kategorie.

Mnoho radosti a pocitů uspokojení při řešení úloh.

Autoři

# Návody k úlohám domácí části I. kola 59.ročníku MO kategorie A

## 1 Soustavy rovnic

Na těchto nemnoha stránkách si ukážeme, jak lze najít řešení několika soustav rovnic obsahujících mocniny a odmocniny. Není bez zajímavosti, že soustavy o dvou neznámých řešil už i teprve sedmiletý Jára Cimrman. Dokázal například najít řešení úlohy

$$9 + 3x = 9y + 3,$$

a to přesto, že měl k dispozici jen jednu rovnici, ačkoliv k řešení úlohy se dvěma neznámými potřebujeme minimálně dvě. Podívejme se, jak tento gigant při řešení postupoval. Uvedený výpočet i Cimrmanův komentář lze najít v pěkné knize „Cimrman v říši hudby“ Jana Klusáka, Ladislava Smoljaka, Zdeňka Svěráka, Jiřího Šebánka a Dr. Evžena Hedvábného roz. Velebný.

$$9 + 3x = 9y + 3$$

$$y + x = 9 + 3 + 9 + 3$$

$$y + x = 24$$

$$y = 2, x = 4.$$

*Z výkladu, který malý Cimrman podal, vyplývá, že neznámé v rovnici chápal jako dvě veličiny, které se navzájem neznají. Vytkl si tedy za cíl ony dvě neznámé seznámit, to znamená dostat je co nejbližší k sobě. A nejen to. Zbavit je ostychu i před ostatními čísly, které se navzájem znají. Předpokládal, že při seznamování vyjeví čísla svou pravou totožnost. A tak, jak to viděl u Tausingera, převedl čísla z jedné strany na druhou: známé shromáždil na jedné straně a neznámé na druhé straně rovnice. Zvláštností jeho postupu bylo, že při převádění ani neměnil znaménko, ani násobení v dělení. „Jak můžeš takhle ta čísla převádět?“ ptal se prý Tausinger. „Jako po lůvce,“ odpověděl bezelstně Cimrman, ukazuje na rovnítko. Rovnici  $y + x = 24$ , z níž Tausinger nemohl ještě výsledek vyčíst, „přečtl“ Cimrman jednoduše:  $y$  stojí vedle  $x$  jako číslo 2 vedle čísla 4. Tedy:  $y = 2, x = 4$ . A skutečně – dosadíme-li do dané rovnice*

$$9 + 3x = 9y + 3$$

$$9 + 3 \cdot 4 = 9 \cdot 2 + 3$$

*dostaneme správný výsledek*

$$21 = 21.$$

V dalším si ukážeme i jiné způsoby řešení. Kdo bude postupovat při řešení

úloh matematické olympiády jako malý Jára, ten sice zaujme a pobaví, ale body nezíská a nevyhraje.

**Příklad 1.** Řešme v  $\mathbb{R}$  soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= \sqrt{4x - 2y}, \\ \sqrt{y - 3x + 4} &= 2.\end{aligned}\tag{1}$$

Postupujme jako někdy v životě, zkusme se zbavit toho, co nám překáží (zde odmocnin). Umocněme proto obě rovnice na druhou. Zjistíme tak, že pro každé řešení  $(x, y)$  úlohy 1 musí platit, že

$$\begin{aligned}x^2 - y &= 4x - 2y, \\ y - 3x + 4 &= 4,\end{aligned}$$

a proto (po jednoduché úpravě) i

$$\begin{aligned}y &= 3x, \\ x^2 - x &= x(x - 1) = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Soustava 2 má zřejmě právě dvě různá řešení  $(x, y) = (0, 0)$  a  $(x, y) = (1, 3)$ . Ale teď buďme velmi opatrní, nenechme se unést ke špatnému závěru, že jsme tímto našli i řešení soustavy 1. Byla by to hrubá chyba. Ve skutečnosti jsme pouze zjistili, že soustava 1 žádné jiné řešení nemá<sup>1</sup>. Zkouškou se lze přesvědčit, že  $(x, y) = (0, 0)$  je a **jediným** řešením soustavy 1.<sup>2</sup>

**Příklad 2.** Řešme v  $\mathbb{R}$  rovnici.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}.\tag{3}$$

Zde nevystačíme (jako při řešení prvního příkladu) pouze s důsledkovými

---

<sup>1</sup>Rozmyslete si podrobně, že jsme vlastně dokázali **pouze** implikaci

$$\left[ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 - y} = \sqrt{4x - 2y}, \\ \sqrt{y - 3x + 4} = 2 \end{array} \right] \Rightarrow [(x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (1, 3)].$$

<sup>2</sup>Pro  $(x, y) = (1, 3)$  není **ani** definováno  $\sqrt{x^2 - y}$ .

úpravami:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\ \Downarrow \\ x^2 + y^2 &= \frac{x^2}{x^2} \\ \Downarrow \\ x^2 + y^2 &= 1,\end{aligned}$$

a následnou zkouškou, kdy postupně dosazujeme do rovnice 1 jedno řešení rovnice  $x^2 + y^2 = 1$  za druhým, protože rovnice  $x^2 + y^2 = 1$  má nekonečně mnoho řešení<sup>3</sup>.

Jednodušší bude používat pouze ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\ \Updownarrow \\ x^2 + y^2 &= \frac{x^2}{x^2} \wedge x > 0 \\ \Updownarrow \\ x^2 + y^2 &= 1 \wedge x > 0,\end{aligned}$$

z nichž vyplývá, že množina

$$\{(\sqrt{1 - y^2}, y) : y \in (-1, 1)\}$$

je tvořena právě všemi řešeními rovnice 1. (A opět si nakreslete obrázek.)

Příklad 2. určitě není příkladem, s jehož řešením by měl čtenář tohoto textu sebemenší problém. Posloužil nám pouze pro názornou ilustraci rozdílu mezi důsledkovou úpravou (kdy sice „neztrácíme“ žádné řešení původního problému, ale kdy upravená úloha může mít řešení více) a ekvivalentní úpravou (kdy původní i upravená úloha mají stejné množiny všech řešení). S důsledkovými a ekvivalentními úpravami při řešení tohoto typu úloh často souvisí platnost – neplatnost následujících tvrzení. Rozmyslete si je!

Platí:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x = y \Rightarrow x^2 = y^2.$$

Neplatí:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 = y^2 \Rightarrow x = y.$$

---

<sup>3</sup>Znázorněte si v rovině všechna řešení této rovnice, tj. množinu  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

Platí:

$$\forall x, y \geq 0 : x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y.$$

Platí:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Platí:

$$\forall x, y \geq 0 : x = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}.$$

**Příklad 3.** Řešme v  $\mathbb{R}$  rovnici

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-11} + \sqrt{x-16} + \sqrt{x-19} + \sqrt{x-20} = 10. \quad (4)$$

K řešení této úlohy tentokrát nedojdeme cestou postupného umocňování; kam tato cesta vede si lze pouze představit, není nutné se bezhlavě pustit do počítání.<sup>4</sup> K úspěšnému vyřešení dané rovnice si stačí pouze všimnout, že funkce  $f$  definovaná na množině

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 20\}$$

(a jiná čísla nás při řešení 4 nezajímají) předpisem

$$f(x) := \sqrt{x-4} + \sqrt{x-11} + \sqrt{x-16} + \sqrt{x-19} + \sqrt{x-20}$$

je rostoucí, tzn.

$$\forall x, y \in M : [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)].$$

Dál je to totiž snadné, protože

$$f(20) = \sqrt{20-4} + \sqrt{20-11} + \sqrt{20-16} + \sqrt{20-19} + \sqrt{20-20} = 10.$$

Takže: rovnice 4 má jediné řešení  $x = 20$ .

(Všimněme a rozmysleme si, proč rovnice

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-11} + \sqrt{x-16} + \sqrt{x-19} + \sqrt{x-20} = 9$$

nemá v  $\mathbb{R}$  žádné řešení a proč rovnice

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-11} + \sqrt{x-16} + \sqrt{x-19} + \sqrt{x-20} = 2009$$

má v  $\mathbb{R}$  právě jedno řešení.<sup>5</sup>)

---

<sup>4</sup>Dobrá rada: často je užitečné rozmyslet si předem následky svých činů.

<sup>5</sup>Pokuste se – pomocí počítače – najít přibližnou hodnotu tohoto řešení.

**Příklad 4.** Řešme v  $\mathbb{R}$  soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= y - 1, \\ \sqrt{y^2 - x} &= x - 1.\end{aligned}\tag{5}$$

Ukažme si dva způsoby řešení.

- Pomocí ekvivalentních úprav:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= y - 1 \\ \sqrt{y^2 - x} &= x - 1 \\ \Updownarrow \\ \begin{aligned} x^2 - y &= y^2 - 2y + 1 & \wedge & \quad x^2 - y \geq 0 & \wedge & \quad y - 1 \geq 0 \\ y^2 - x &= x^2 - 2x + 1 & \wedge & \quad y^2 - x \geq 0 & \wedge & \quad x - 1 \geq 0 \end{aligned} \\ \Updownarrow \\ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= -y + 1 & \wedge & \quad x^2 - y \geq 0 & \wedge & \quad y \geq 1 \\ x^2 - y^2 &= x - 1 & \wedge & \quad y^2 - x \geq 0 & \wedge & \quad x \geq 1 \end{aligned} \\ \Updownarrow \\ x^2 - y^2 = x - 1 & \wedge \boxed{x + y = 2} \wedge \begin{aligned} x^2 - y &\geq 0 \\ y^2 - x &\geq 0 \end{aligned} \wedge \boxed{\begin{aligned} y &\geq 1 \\ x &\geq 1 \end{aligned}} \\ \Updownarrow \\ x = 1 & \wedge y = 1.\end{aligned}$$

(Znázorněte si v rovině množinu  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2 \wedge x \geq 1 \wedge y \geq 1\}$ .)

Závěr: úloha 5 má právě jedno řešení, a to  $(x, y) = (1, 1)$ .

- Jiné řešení se opírá o pozorování, že ze symetrie soustavy 5 vyplývá: je-li  $(x, y)$  řešením, řeší rovnici 5 taky  $(y, x)$ . Stačí proto hledat pouze ta řešení  $(x, y)$ , pro něž je

$$x \geq y \geq 1.$$

Odtud již snadno plyne,<sup>6</sup> že

$$\begin{aligned}
 \sqrt{y^2 - x} = x - 1 &\geq y - 1 = \sqrt{x^2 - y} \\
 \Downarrow \\
 y^2 - x &\geq x^2 - y \\
 \Downarrow \\
 y^2 - y &\geq y^2 - x \geq x^2 - y \\
 \Downarrow \\
 y^2 &\geq x^2 \\
 \Downarrow \\
 y &\geq x.
 \end{aligned}$$

Protože  $x \geq y$  a současně  $y \geq x$ , je nutně  $x = y$ . A snadno dopočítáme (a zkouškou ověříme!), že jediným řešením soustavy rovnic 5 je

$$(x, y) = (1, 1).$$

## 2 Zadání a řešení úkolů

Nejdříve si nakreslete obrázek. Do obecného trojúhelníku  $ABC$  vepište kružnici  $k(O, r)$  a dotykové body kružnice  $k$  se stranou  $BC$  označte  $U$ , se stranou  $AC$  označte  $V$  a se stranou  $AB$  označte  $W$ . Dále sestrojte kružnici  $k'(O', r')$  připsanou straně  $BC$  tak, že dotykový bod se stranou  $BC$  je  $U'$ , dotykový bod s polopřímku  $AC$  je  $V'$  a dotykový bod s polopřímku  $AB$  je  $W'$ . Nakonec označte  $S$  střed strany  $BC$ . Tento obrázek Vám poslouží jako názorná pomůcka pro řešení příkladů N1, N2 a D1, budeme se na něj odvolávat.

**Příklad N1** Dokažte rovnost  $|AT_1| = |AT_2|$ , kde  $T_1, T_2$  jsou body dotyku obou tečen vedených z bodu  $A$  k dané kružnici.

**Řešení** Nejdříve úlohu ekvivalentně přeformulujeme, rozdíl bude jen ve značení.

Dokažte rovnost  $|AV| = |AW|$ , kde  $V, W$  jsou body dotyku obou tečen vedených z bodu  $A$  k dané kružnici  $k(O; r)$ . Tuto rovnost dokázat je snadné a je to možné provést několika způsoby (osová souměrnost, věty o shodnosti trojúhelníků atd.). Ukažme si alespoň jeden z nich.

---

<sup>6</sup>Rozmyslete si podrobně!

Oba trojúhelníky  $AOV, AOW$  jsou pravoúhlé, mají společnou přeponu  $AO$  a platí  $|VO| = |WO| = r$ , kde  $r$  je poloměr kružnice  $k$ . Z Pythagorovy věty proto plyne  $|AV| = |AW|$ .

**Příklad N2** Vyjádřete délky všech úseků, na které jsou strany daného trojúhelníku rozděleny

- a) třemi body dotyku kružnice vepsané,
- b) třemi body dotyku kružnic připsaných,  
pomocí délek  $a, b, c$  celých (tj. nerozdělených) stran. Z výsledku vypočítejte, že na každé straně trojúhelníku tvoří bod dotyku z a) a bod dotyku z b) dvojici bodů, které jsou souměrně sdružené podle středu dotyčné strany.

**Řešení** Zcela postačí, pokud vyřešíme následující, přeformulovanou úlohu.

Vyjádřete délky všech úseků, na které jsou strany daného trojúhelníku  $ABC$  (viz obrázek) rozděleny třemi body dotyku  $U, V, W$  kružnice vepsané, a to pomocí délek  $a, b, c$  celých (tj. nerozdělených) stran trojúhelníku. Dále určete (pomocí  $a, b, c$ ) délky úseků na které je rozdělena strana  $BC$  bodem dotyku  $U'$  kružnice připsané ke straně  $BC$ . Dokažte, že body  $U$  a  $U'$  jsou souměrně sdružené podle středu  $S$  strany  $BC$ .

Nejdříve se budeme věnovat kružnici vepsané trojúhelníku  $ABC$ . Nechť  $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$ . Z Příkladu N1 plyne  $|AV| = |AW| = x, |BU| = |BW| = y, |CU| = |CV| = z$ . Pak ovšem z obrázku snadno odvodíme následující trojici lineárních rovnic:

$$z + y = a$$

$$x + z = b$$

$$x + y = c$$

Z první rovnice osamostatníme  $z$  ( $z = a - y$ ) a ve druhé rovnici nahradíme  $z$  výrazem  $a - y$  ( $x + a - y = b$ ), čímž obdržíme dvojici lineárních rovnic:

$$x - y = b - a$$

$$x + y = c$$

Z čehož plyne  $2x = c + b - a$ , a proto  $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$ . Zpětným dosazením pak dostaneme  $y = \frac{1}{2}(a + c - b)$  a  $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .

Nyní přejdeme ke kružnici připsané ke straně  $BC$ . Označme  $|U'C| = x'$  a  $|U'B| = y'$ . Dle příkladu N1 je  $|U'C| = |V'C| = x'$  a  $|U'B| = |W'B| = y'$ . Opět, dle obrázku sestavíme následující lineární rovnice:

$$x' + y' = a$$

$$x' + b = y' + c$$

Jednoduchým výpočtem pak zjistíme, že  $x' = \frac{1}{2}(a + c - b)$  a  $y' = \frac{1}{2}(a + b - c)$ . (Obdobně bychom postupovali i v případě připsaných kružnic ke zbývajícím dvěma stranám.)

Z výše uvedeného vyplývá, že  $|UC| = z = \frac{1}{2}(a + b - c) = y' = |U'B|$ . Proto  $|US| = |U'S|$ , kde  $S$  je střed strany  $BC$ . Neboť body  $S, U$  a  $U'$  ( $U \neq U'$ ) leží na přímce  $BC$ , tak jsou body  $U$  a  $U'$  souměrně sdružené podle středu  $S$ .

Opět si nakreslete obrázek. Sestrojte kružnici  $k(O, r)$  vepsanou tečnovému lichoběžníku  $ABCD$ , přičemž  $AB, CD$  jsou základny lichoběžníku a  $|AB| > |CD|$ . Body dotyku kružnice  $k$  se stranou  $AB$  označte  $E$  a se stranou  $CD$  pak  $F$ . Průsečík polopřímek  $AD$  a  $BC$  označte  $X$ . Dále vepište trojúhelníku  $DCX$  kružnici  $k'(O', r')$  a bod dotyku se stranou  $DC$  označte  $E'$ . (Bod  $E'$  by měl ležet na polopřímce  $XE'$ !) Tento obrázek se bude vztahovat pouze k řešení Příkladu N3.

**Příklad N3** Kružnice vepsaná tečnovému lichoběžníku  $ABCD$  se dotýká základů  $AB, CD$  po řadě v bodech  $E, F$ . Dokažte rovnost  $|AE| \cdot |DF| = |BE| \cdot |CF|$ .

**Řešení** Vidíme, že trojúhelníky  $ABX$  a  $CDX$  jsou stejnohlé v homotétii  $H(X; \frac{|AB|}{|CD|} = k)$ . Proto  $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|DE'|}{|CE'|}$  (viz obrázek). Neboť bod  $E'$  je bod dotyku (se stranou  $CD$ ) kružnice vepsané do trojúhelníku  $CDX$  a  $F$  je bod dotyku kružnice připsané ke straně  $CD$ , platí  $|CE'| = |DF|$  (viz Příklad N2). Potom však také platí  $|DE'| = |CF|$ .

Z výše uvedeného dostáváme  $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|DE'|}{|CE'|} = \frac{|CF|}{|DF|}$ , a tudíž  $|AE| \cdot |DF| = |BE| \cdot |CF|$ .

**Příklad D1** Do téhož konvexního úhlu jsou vepsány dvě neprotínající se kružnice. Jejich společná vnitřní tečna s body dotyku  $K, L$  protne ramena úhlu v bodech  $A, B$ . Dokažte rovnost  $|AK| = |BL|$ .

**Řešení** Řešení této úlohy je přímým důsledkem řešení úlohy N2. Podívejme se na první obrázek. Kružnice  $k$  a  $k'$  jsou ony neprotínající se kružnice vepsané do konvexního úhlu  $CAB$  a přímka  $BC$  je jejich společná vnitřní tečna s body dotyku  $U, U'$ . Stačí tedy přeznačit  $U$  na  $K$ ,  $U'$  na  $L$  a  $C$  na  $A$  (Bod  $B$  necháme) a vidíme, že požadovanou rovnost  $|AK| = |BL|$  jsme již dokázali v řešení Příkladu N2.

**Příklad D2** Je dán rovnoramenný trojúhelník  $ABC$  se základnou  $AB$ . Na jeho výšce  $CD$  je zvolen bod  $P$  tak, že kružnice vepsané trojúhelníku  $ABP$  a čtyřúhelníku  $PECF$  jsou shodné; přitom bod  $E$  je průsečík přímky  $AP$  se stranou  $BC$  a  $F$  průsečík přímky  $BP$  se stranou  $AC$ . Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům  $ADP$  a  $BCP$  jsou shodné.

**Řešení** Neboť je příklad označen 49-A-III-2, tak byl již zařazen do matematické olympiády a jeho vzorové řešení existuje. Proto jeho řešení nepředkládám.

### 3 Příklady z teorie čísel

Každé přirozené číslo je možné jednoznačně napsat jako součin mocnin prvočísel. Například

$$12 = 2^2 \cdot 3.$$

Takový zápis přirozeného čísla  $n$  nazýváme *kanonickým rozkladem* čísla  $n$ .

Dokážete najít kanonický rozklad čísla  $7!$ ,  $20!$ , nebo obecněji kanonický rozklad čísla  $n!$ ?

**Definice 3.1** (celá část) *Celou částí reálného čísla  $r$  nazveme celé číslo  $z$  splňující:*

$$z \leq r < z + 1.$$

*Celou část reálného čísla  $r$  budeme značit  $[r]$ .*

**Lemma 3.1** *Nechť  $n, p \in \mathbb{N}$ . Potom počet čísel ve tvaru  $p \cdot m$ , kde  $p \cdot m \leq n$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , je roven  $\left[\frac{n}{p}\right]$ .*

*Důkaz.* Nejprve připomeňme, že  $[x]$  je označení pro celou část reálného čísla  $x$  (viz. Definice 3.1).

Pokud  $n < p$ , pak čísla ve tvaru  $p \cdot m$ , kde  $p \cdot m \leq n$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), evidentně neexistují. A opravdu. V tomto případě je  $0 < \frac{n}{p} < 1$ , a tak  $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$ .

V případě  $n \geq p$  čísla ve tvaru  $p \cdot m$ , kde  $p \cdot m \leq n$ , existují (minimálně jedno:  $p \cdot 1$ ). Dejme tomu, že čísla ve tvaru  $p \cdot m$ , která jsou menší, nebo rovna  $n$ , jsou

$$p \cdot 1 < p \cdot 2 < \dots < p \cdot m_0 \leq n < p \cdot (m_0 + 1)$$

a je jich celkem  $m_0$ .

Odtud

$$p \cdot m_0 \leq n < p \cdot (m_0 + 1),$$

$$m_0 \leq \frac{n}{p} < m_0 + 1.$$

Podle Definice 3.1 je  $m_0 = \left[\frac{n}{p}\right]$ .

□

**Věta 3.1** *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Potom  $n! = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq n} p^{\alpha(p)}$ , kde*

$$\alpha(p) = \sum_{k \in \mathbb{N}, p^k \leq n} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

*Důkaz.* Věta 3.1 říká, že v kanonickém rozkladu čísla  $n! = 1.2. \dots .n$  jsou zastoupena všechna prvočísla  $p \leq n$ , a to s exponentem  $\alpha(p)$ .

Protože  $n!$  je součin čísel meších, nebo rovných  $n$ , je zřejmé, že v jeho kanonickém rozkladu mohou vystupovat pouze prvočísla  $p \leq n$ .

Uvažujme, čemu je roven exponent  $\alpha(p)$ . K jeho hodnotě mohou přispívat čísla vyskytující se v součinu  $1.2. \dots .n$ , která mají tvar  $p.m$ .<sup>7</sup>

Kolik čísel ve tvaru  $p.m$  se vyskytuje v součinu  $1.2. \dots .n$ ? Jsou to ty, které splňují  $p.m \leq n$ . Těch je podle Lematu 3.1 celkem  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$  a každé z nich přispívá k hodnotě  $\alpha(p)$  alespoň číslem 1.

Číslem 1 přispívají k hodnotě  $\alpha(p)$  ty čísla, která mají tvar  $p.m \leq n$ , ale nemají tvar  $p^2.m$ . Těch je podle Lematu 3.1 celkem  $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ .

Číslem 2 přispívají k hodnotě  $\alpha(p)$  ty čísla, která mají tvar  $p^2.m \leq n$ , ale nemají tvar  $p^3.m$ . Těch je podle Lematu 3.1 celkem  $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ .

⋮

Číslem  $k$  přispívají k hodnotě  $\alpha(p)$  ty čísla, která mají tvar  $p^k.m \leq n$ , ale nemají tvar  $p^{k+1}.m$ . Těch je podle Lematu 3.1 celkem  $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$ .

⋮

Pokud  $p^{k_0} > n$ , pak se  $p^{k_0}.m$  již nevyskytuje v součinu  $1.2. \dots .n$ , a tak k hodnotě  $\alpha(p)$  nepřispívá. Odpovídá to tomu, že v tom případě je čísel  $p^{k_0}.m \leq n$  celkem  $\left\lfloor \frac{n}{p^{k_0}} \right\rfloor = 0$ . Označíme-li  $k_1$  číslo splňující podmínku  $p^{k_1} \leq n$  a zároveň  $p^{k_1+1} > n$  pak platí

$$\alpha(p) = 1. \left( \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \right) + 2. \left( \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor \right) + \dots + k_1. \left( \left\lfloor \frac{n}{p^{k_1}} \right\rfloor - \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{p^{k_1+1}} \right\rfloor}_{=0} \right).$$

Odtud pomocí vytýkání dostáváme

$$\alpha(p) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + (2-1) \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + (3-2) \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots + (k_1 - (k_1 - 1)) \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^{k_1}} \right\rfloor,$$

$$\alpha(p) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^{k_1}} \right\rfloor,$$

$$\alpha(p) = \sum_{k \in \mathbb{N}, p^k \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

□

<sup>7</sup>Uvažme, že některá z čísel ve tvaru  $p.m$  mohou mít i tvar  $p^2.m$  ( $p^2.m = p.p.m = p.m^*$ ). Dále, některá z čísel ve tvaru  $p^2.m$  mohou mít i tvar  $p^3.m$  ( $p^3.m = p^2.p.m = p.m^*$ ). A tak dále. Samozřejmě se ale v úvahách stačí omezit jen na tvary  $p^k.m$ , kde  $k \in \mathbb{N}, p^k \leq n$ .

**Důsledek 3.1** *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Potom  $n! = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathbb{P}}} p^{\alpha(p)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha(p)}$ , kde*

$$\alpha(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^k} \right].$$

*Důkaz.* Podle Věty 3.1 je  $n! = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq n} p^{\alpha(p)}$ , kde  $\alpha(p) = \sum_{k \in \mathbb{N}, p^k \leq n} \left[ \frac{n}{p^k} \right]$ .

Pro každé  $k_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $p^{k_0} > n$  zřejmě platí  $\left[ \frac{n}{p^{k_0}} \right] = 0$ . Proto

$$\sum_{k \in \mathbb{N}, p^k \leq n} \left[ \frac{n}{p^k} \right] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[ \frac{n}{p^k} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^k} \right].$$

Pro  $p > n$  evidentně platí  $\left[ \frac{n}{p^k} \right] = 0$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ . Proto pro  $p > n$  je  $\alpha(p) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left[ \frac{n}{p^k} \right] = 0$ . A tak se v součinu  $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha(p)}$  vyskytují s nenulovým exponentem pouze prvočísla  $p \leq n$ . Odtud dostáváme

$$\prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq n} p^{\alpha(p)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\alpha(p)}.$$

□

Pomocí Věty 3.1 snadno vyřešíme motivační příklady.

**Příklad 3.1** *Nalezněte kanonické rozklady čísel  $7!$  a  $20!$ .*

Řešení:

Zmíněná Věta 3.1 říká, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $n! = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq n} p^{\alpha(p)}$ , kde

$$\alpha(p) = \sum_{k \in \mathbb{N}, p^k \leq n} \left[ \frac{n}{p^k} \right].$$

Musíme proto najít všechna prvočísla  $p$  splňující  $p \leq n$ . V případě  $n = 7$  jsou to prvočísla 2, 3, 5 a 7.

Nyní určíme, jaké mocniny budou mít tato prvočísla v kanonickém rozkladu čísla  $7!$ .

$$\begin{aligned} \alpha(2) &= \sum_{k \in \mathbb{N}, 2^k \leq 7} \left[ \frac{7}{2^k} \right] = \left[ \frac{7}{2} \right] + \left[ \frac{7}{2^2} \right] = [3, 5] + [1, 75] = 3 + 1 = 4, \\ \alpha(3) &= \sum_{k \in \mathbb{N}, 3^k \leq 7} \left[ \frac{7}{3^k} \right] = \left[ \frac{7}{3} \right] = [2, \overline{3}] = 2, \\ \alpha(5) &= \sum_{k \in \mathbb{N}, 5^k \leq 7} \left[ \frac{7}{5^k} \right] = \left[ \frac{7}{5} \right] = [1, 4] = 1, \\ \alpha(7) &= \sum_{k \in \mathbb{N}, 7^k \leq 7} \left[ \frac{7}{7^k} \right] = \left[ \frac{7}{7} \right] = [1] = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Potom

$$7! = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq 7} p^{\alpha(p)} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

V případě  $n = 20$  postupujeme analogicky. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Pak určíme hodnoty  $\alpha(p)$ :

$$\alpha(2) = \sum_{k \in \mathbb{N}, 2^k \leq 20} \left\lfloor \frac{20}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^4} \right\rfloor = 18.$$

$$\alpha(3) = \sum_{k \in \mathbb{N}, 3^k \leq 20} \left\lfloor \frac{20}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{9} \right\rfloor = 8.$$

$$\alpha(5) = \sum_{k \in \mathbb{N}, 5^k \leq 20} \left\lfloor \frac{20}{5^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor = 4.$$

$\vdots$

Odtud

$$20! = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq 20} p^{\alpha(p)} = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \cdot 19^1$$

Obdobně můžeme určit kanonický rozklad kombinačního čísla  $\binom{2n}{n}$ .

**Lemma 3.2** *Nechť  $n \in \mathbb{N}$ . Potom*

$$\binom{2n}{n} = \prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{P}}} p^{\beta(p)},$$

$$\text{kde } \beta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

*Důkaz.* Připomeňme, že hodnota kombinačního čísla je dána vztahem

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{s!(r-s)!}$$

Proto

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Podle Věty 3.1 a Důsledku 3.1 můžeme psát

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_1(p)}}{\left( \prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_2(p)} \right)^2}, \quad (7)$$

$$\text{kde } \alpha_1(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor \text{ a } \alpha_2(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Z důkazu Důsledku 3.1 je patrné, že  $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_2(p)} = \prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_2(p)}$ . Dosadíme do vztahu (7) a obdržíme

$$\binom{2n}{n} = \frac{\prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_1(p)}}{\left( \prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_2(p)} \right)^2} = \frac{\prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_1(p)}}{\prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{2\alpha_2(p)}} = \prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\alpha_1(p) - 2\alpha_2(p)} = \prod_{\substack{p \leq 2n \\ p \in \mathbb{N}}} p^{\beta(p)},$$

kde  $\beta(p) = \alpha_1(p) - 2\alpha_2(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$ .

□

**Příklad 3.2** *Určete, kolika nulami končí dekadický zápis čísla  $33!$ .*

Řešení:

Nejprve podle Věty 3.1 nalezneme kanonický rozklad čísla  $33!$ . Prvočísla menší než  $33$  jsou  $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$  a  $31$ . Pak určíme hodnoty  $\alpha(p)$ :

$$\alpha(2) = \sum_{k \in \mathbb{N}, 2^k \leq 33} \left\lfloor \frac{33}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{33}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{32} \right\rfloor = 31.$$

$$\alpha(3) = \sum_{k \in \mathbb{N}, 3^k \leq 33} \left\lfloor \frac{33}{3^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{33}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{27} \right\rfloor = 15.$$

$$\alpha(5) = \sum_{k \in \mathbb{N}, 5^k \leq 33} \left\lfloor \frac{33}{5^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{33}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{25} \right\rfloor = 7.$$

$$\alpha(7) = \left\lfloor \frac{33}{7} \right\rfloor = 4.$$

$$\alpha(11) = \left\lfloor \frac{33}{11} \right\rfloor = 3.$$

$$\alpha(13) = \left\lfloor \frac{33}{13} \right\rfloor = 2.$$

$$\alpha(17) = \left\lfloor \frac{33}{17} \right\rfloor = 1.$$

$$\alpha(19) = \alpha(23) = \alpha(27) = \alpha(29) = \alpha(31) = 1.$$

Odtud

$$20! = \prod_{p \in \mathbb{P}, p \leq 33} p^{\alpha(p)} = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1.$$

Z toho je zřejmé, že  $10^7 \mid 33!$ , ale  $10^8 \nmid 33!$ . Proto číslo  $33!$  v dekadickém zápise končí právě sedmi nulami.

**Příklad 3.3** *Dokažte, že číslo  $N = 46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49!$  není druhou mocninou celého čísla, a pak najděte jeho největší dělitel, který je druhou mocninou celého čísla.*

Řešení:

Číslo  $N$  není druhou mocninou, protože v jeho rozkladu na prvočinitele vystupuje prvočíslo 47 s lichým exponentem 3. Je to patrné z následujících rovností.

$$\begin{aligned} N &= 46!.47!.48!.49! = (46!)^4.47.(47.48).(47.48.49) = \\ &= (46!)^4.47^3.48^2.7^2 = 47.((46!)^2.47.48.7)^2. \end{aligned}$$

Plyne z nich také, že největší druhou mocninou, která je dělitelem čísla  $N$ , je číslo  $((46!)^2.47.48.7)^2 = \frac{N}{47}$ .

**Příklad 3.4** Na tabuli je zapsáno sedm čísel  $p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2, q^3$ , kde  $p$  a  $q$  jsou dvě různá prvočísla. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíslný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.)

Například, místo čísel  $pq, pq^2$  můžeme napsat číslo  $q$ , místo  $q^2, pq^2$  můžeme napsat číslo  $p$ , ...

Po šesti výše popsaných krocích zůstalo na tabuli jediné číslo. Určete ho bez rozboru všech možných postupů, jakými lze jednotlivé kroky volit.

Řešení:

Nejprve vynásobme zadaná čísla

$$p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2, q^3.$$

Na počátku je součin všech těchto čísel roven  $S_0 = p^9q^9$ . Uvažujme, jak se tento součin změní po provedení jednoho kroku.

Nahrazujeme čísla ve tvaru  $a, k$  a číslem  $k$ . Proto součin zbylých čísel  $S_1$  je roven

$$S_1 = \frac{S_0}{a^2} = \frac{p^9q^9}{a^2}.$$

Uvažme, že  $a = p^i q^j$ , kde  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ . A tak

$$S_1 = \frac{p^9q^9}{a^2} = \frac{p^9q^9}{p^{2i}q^{2j}} = p^m q^n,$$

kde  $m$  a  $n$  jsou lichá čísla (neboť po jednom kroku od exponentu čísel  $p$  a  $q$  v rozkladu  $S_0 = p^9q^9$  odečteme vždy sudé číslo (nulu můžeme považovat za sudé číslo)).

Tak tomu ovšem bude při libovolném ( $i$ -tém) kroku. Součin všech zbývajících čísel je roven číslu

$$S_i = p^{m_i} q^{n_i},$$

kde  $m_i$  a  $n_i$  jsou lichá čísla.

A jak bude vypadat poslední zbývající číslo po šesti krocích? Každé z původně zadaných čísel má tvar

$$p^i q^j, \text{ kde } i + j \leq 3.$$

Pro celočíselný podíl dvou takových čísel (které nahrazujeme) musí platit

$$\frac{p^{i_1} q^{j_1}}{p^{i_2} q^{j_2}} = p^{i_1 - i_2} q^{j_1 - j_2} = p^{i_3} q^{j_3},$$

kde  $i_3 + j_3 \leq i_1 + j_1 \leq 3$ . Proto u každého čísla  $p^m q^n$ , které se v libovolném kroku na tabuli objeví platí  $m + n \leq 3$ .

Poslední zbývající číslo je rovno

$$S_6 = p^{m_6} q^{n_6}$$

a víme o něm, že  $m_6$  a  $n_6$  jsou kladná lichá čísla, a navíc  $m_6 + n_6 \leq 3$ . Existuje jediná možnost, a to  $m_6 = 1$  a  $n_6 = 1$ . Poslední zbývající číslo proto musí být

$$pq.$$

## 4 Příklad 4

V této kapitole se budeme věnovat ostroúhlým trojúhelníkům a jejich připsaným kružnicím. Především si budeme všimnout jednotlivých vlastností úhlů, jejichž vrcholem je střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané a ortocentrum (průsečík výšek).

V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku  $ABC$  označme  $O$ ,  $V$  a  $S$  po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané.

Poznamenejme, že střed  $O$  kružnice trojúhelníku opsané se nalézá v průsečíku os stran. Kdežto střed  $S$  kružnice trojúhelníku vepsané se nalézá v průsečíku os úhlů.

Následující tvrzení plyne z věty o obvodovém úhlu a bude velice užitečné pro důkaz hlavních výsledků.

**Tvrzení 1 (O obvodovém a středovém úhlu v opsané kružnici)** *Bud'  $ABC$  ostroúhlý trojúhelník a  $O$  střed kružnice opsané. Pak platí  $2|\angle ACB| = |\angle AOB|$ ,  $2|\angle BAC| = |\angle BOC|$  a  $2|\angle CBA| = |\angle COA|$ .*

**Věta 1** *V každém ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  platí  $|\angle AOB| = 2\gamma$ ,  $|\angle ASB| = 90^\circ + \gamma/2$ ,  $|\angle AVB| = 180^\circ - \gamma$ .*

*Důkaz.* První rovnost plyne z Tvzení 1.

K důkazu druhé rovnosti uijeme faktu  $|\angle BAS| = \alpha/2$  a  $|\angle ABS| = \beta/2$ , plynoucího z konstrukce bodu  $S$ .

Zřejmě platí

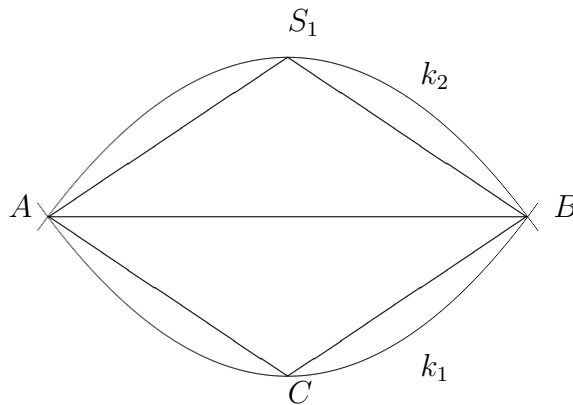
$$\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 90^\circ.$$

Pak dopočítáme

$$\begin{aligned} |\angle ASB| &= 180^\circ - \alpha/2 - \beta/2 \\ &= 180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2) + \gamma/2 \\ &= 90^\circ + \gamma/2. \end{aligned}$$

Všimněme si, že  $|\angle VAB| = 90^\circ - \beta$  a  $|\angle VBA| = 90^\circ - \alpha$ . Pak  $|\angle AVB| = \alpha + \beta$ , tedy  $|\angle AVB| = 180^\circ - \gamma$  což dokazuje poslední rovnost.  $\square$

**Poznámka 1** *Poznamenejme, že podmínka ostroiti u předchozího tvrzení je podstatná. Zkonstruuje dvě kružnice  $k_1$  a  $k_2$  o stejném poloměru tak, že střed  $S_1$  kružnice  $k_1$  leží na kružnici  $k_2$ . Označme průsečíky kružnic  $A, B$ , střed kružnice  $k_2$  označme  $C$ . Pak trojúhelník  $ABC$  je zřejmě tupouhlý (tupý je úhel  $\angle ACB$ , zvidavý čtenář zajisté provede kontrolu tohoto tvrzení) a platí  $|\angle ACB| = |\angle AOB| = \gamma$  (jaká je velikost úhlu  $\gamma$  a závisí velikost tohoto úhlu na volbě poloměru kružnic?).*



**Důsledek 1** *Jeli  $\gamma = 60^\circ$ , pak platí  $|\angle AOB| = |\angle ASB| = |\angle AVB| = 120^\circ$ . Navíc, všechny body  $A, B, O, S, V$  leží na jedné kružnici.*

*Důkaz.* První část tvrzení plyne přímým dosazením za  $\gamma$  do Věty 1.

Body  $O, S$  a  $V$  leží ve stejné polorovině vyřatě přímku  $AB$  a úhly  $AOB, ASB, AVB$  jsou zřejmě shodné. Pak body  $A, B, O, S, V$  leží na jedné kružnici.  $\square$

**Věta 2** *Bud'  $ABC$  trojúhelník a  $o$  osa vnitřního úhlu  $\gamma$ . Pak  $|AX| = |BX|$ , kde  $X \neq C$  je průsečík osy  $o$  a kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ .*

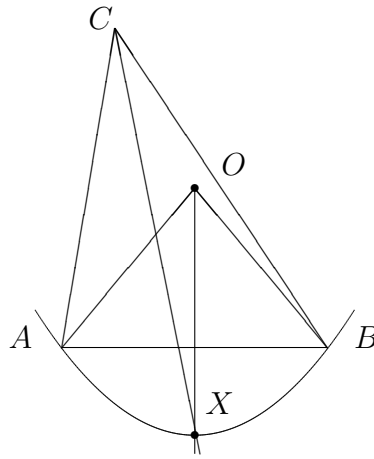
Zřejmě platí  $|\angle ACX| = |\angle XCB| = \gamma/2$ . Tedy příslušné obvodové úhly jsou shodné a tedy i tětivy  $AX$  a  $BX$  jsou taktéž shodné.

**Důsledek 2** *Pokud strany  $AC$  a  $BC$  trojúhelníku  $ABC$  nejsou shodné, protne osa vnitřního úhlu  $ACB$  osu strany  $AB$  v bodě, který leží na kružnici, která je trojúhelníku  $ABC$  opsaná.*

*Důkaz.* Tvrzení plyne přímo z Věty 2. □

**Poznámka 2** *Všimněme si (viz obrázek níže), že osa středového úhlu a osa obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku se protíná v témž bodě, který leží na tomto oblouku.*

*K důkazu použijeme notaci zavedenou ve Větě 2 a  $O$  bude střed kružnice opsané. Z Věty 2 plyne, že  $|AX| = |BX|$ . Trojúhelníky  $AXO$  a  $XOB$  jsou tedy shodné a jejich společná strana  $OX$  je osou úhlu  $AOB$ . Celkově tedy, osy úhlů  $ACB$  a  $AOB$  se protínají v témže bodě  $X$ .*



## 5 Rekurentní rovnice

Předpokládejme, že máme posloupnost  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$  splňující pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  rekurentní vztah

$$x_{n+1} = qx_n + r, \quad (8)$$

popř.

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + r, \quad (9)$$

kde  $p, q, r \in \mathbb{R}$  a  $q \neq 0$ . V prvním případě hovoříme o rekurentní rovnici 1. řádu, ve druhém se jedná o rekurentní rovnici 2. řádu.

V tomto textu se budeme zabývat hledáním explicitního (nerekurentního) vyjádření  $n$ -tého členu  $x_n$  takovéto posloupnosti.

**Příklad 1** Najděte explicitní vyjádření pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ , která je dána rekurentním vztahem  $x_{n+1} = 2x_n$  a počáteční podmínkou  $x_0 = 3$ .

Snadno se přesvědčíme, že se jedná o posloupnost

$$(3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots),$$

která zřejmě pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  splňuje vztah

$$x_n = 3 \cdot 2^n.$$

Obecně platí, že řešením rekurentní rovnice  $x_{n+1} = qx_n$  s počáteční podmínkou  $x_0 = a$  je vždy geometrická posloupnost s počátečním členem  $a$  a s kvocientem  $q$ , tj. pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí  $x_n = aq^n$ .

Nyní již tedy umíme řešit rekurentní rovnice (8) v případě, že  $r = 0$  (tzv. homogenní případ).

Zkusme se zamyslet, jak by bylo možné vyřešit rovnici (8) i v případě obecného  $r \in \mathbb{R}$  (tzv. nehomogenní případ).

Jednou z možností, jak postupovat, je převést nehomogenní rovnici na homogenní. Celý postup je založen na následující myšlence. Definujme novou posloupnost  $y_n = x_n - c$ , kde  $c$  je vhodná konstanta. Vztah  $x_n = y_n + c$  pak dosadíme do rovnice (8) a dostaneme  $(y_{n+1} + c) = q(y_n + c) + r$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+1} = qy_n + c(q - 1) + r$ . Jestliže zařídíme, aby  $c(q - 1) + r = 0$ , tj.  $c = \frac{r}{1-q}$  (což lze pouze pro  $q \neq 1$ ), dostaneme homogenní rovnici, kterou umíme řešit. Po vyřešení dostaneme obecný předpis pro  $y_n$ , odkud snadno najdeme předpis pro  $x_n$ , neboť  $x_n = y_n + c$ .

V případě  $q = 1$  má rovnice (8) tvar  $x_{n+1} = x_n + r$ . Takovou rovnici snadno vyřešíme přímo. Řešením je totiž aritmetická posloupnost s diferencí  $r$ . Jestliže navíc

uvažujeme počáteční podmínku  $x_0 = a$ , dostáváme obecný předpis  $x_n = a + rn$ .

Ilustrujme postup na následujících příkladech.

**Příklad 2** Najděte explicitní vyjádření pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ , která je dána rekurentním vztahem  $x_{n+1} = 2x_n - 3$  a počáteční podmínkou  $x_0 = 2$ .

Definujme novou posloupnost  $y_n = x_n - c$ , kde  $c$  je vhodná konstanta. Vztah  $x_n = y_n + c$  dosadíme do rekurentní rovnice ze zadání a dostaneme  $(y_{n+1} + c) = 2(y_n + c) - 3$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+1} = 2y_n + c - 3$ , odkud je vidět, že je vhodné volit  $c = 3$ . Pak totiž dostáváme homogenní rovnici  $y_{n+1} = 2y_n$  s počáteční podmínkou  $y_0 = x_0 - c = 2 - 3 = -1$ . Řešením je tedy geometrická posloupnost s počátečním členem  $y_0 = -1$  a s kvocientem  $q = 2$ , tj. pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí  $y_n = -2^n$ , tj.

$$x_n = y_n + c = 3 - 2^n.$$

**Příklad 3** Najděte explicitní vyjádření pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ , která je dána rekurentním vztahem  $x_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - x_n)$  a počáteční podmínkou  $x_0 = 2$ .

Definujme novou posloupnost  $y_n = x_n - c$ , kde  $c$  je vhodná konstanta. Vztah  $x_n = y_n + c$  dosadíme do rekurentní rovnice ze zadání a dostaneme  $(y_{n+1} + c) = \frac{1}{3}(4 - (y_n + c))$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}c$ , odkud je vidět, že je vhodné volit  $c = 1$ . Pak totiž dostáváme homogenní rovnici  $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n$  s počáteční podmínkou  $y_0 = x_0 - c = 2 - 1 = 1$ . Řešením je tedy geometrická posloupnost s počátečním členem  $y_0 = 1$  a s kvocientem  $q = -\frac{1}{3}$ , tj. pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí  $y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ , tj.

$$x_n = y_n + c = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

**Příklad 4** Najděte explicitní vyjádření pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ , která je dána rekurentním vztahem  $x_{n+1} = 4x_n + 1$  a počáteční podmínkou  $x_0 = \frac{1}{6}$ .

Definujme novou posloupnost  $y_n = x_n - c$ , kde  $c$  je vhodná konstanta. Vztah  $x_n = y_n + c$  dosadíme do rekurentní rovnice ze zadání a dostaneme  $(y_{n+1} + c) = 4(y_n + c) + 1$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+1} = 4y_n + 3c + 1$ , odkud je vidět, že je vhodné volit  $c = -\frac{1}{3}$ . Pak totiž dostáváme homogenní rovnici  $y_{n+1} = 4y_n$  s počáteční podmínkou  $y_0 = x_0 - c = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ . Řešením je tedy geometrická posloupnost s počátečním členem  $y_0 = \frac{1}{2}$  a s kvocientem  $q = 4$ , tj. pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí  $y_n = \frac{1}{2} \cdot 4^n$ , tj.

$$x_n = y_n + c = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4^n.$$

**Příklad 5** Najděte explicitní vyjádření pro  $n$ -tý člen posloupnosti  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ , která je dána rekurentním vztahem  $x_{n+1} = x_n + 2$  a počáteční podmínkou  $x_0 = 1$ .

V tomto případě je řešením aritmetická posloupnost s počátečním členem  $x_0 = 1$  a s diferencí  $r = 2$ , tj. pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí

$$x_n = 1 + 2n.$$

Nyní se zaměříme na rovnici (9), což je rovnice druhého řádu. Nejprve se naučíme řešit homogenní případ, tj. rovnici

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n. \quad (9H)$$

Pro řešení takové rovnice je klíčová tzv. charakteristická rovnice, což je kvadratická rovnice  $t^2 = pt + q$ . Přitom je podstatné, jaké jsou kořeny charakteristické rovnice.

- Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny  $\alpha, \beta$ , pak posloupnosti  $\{\alpha^n\}_{n=0}^{+\infty}$  a  $\{\beta^n\}_{n=0}^{+\infty}$  jsou dvě (lineárně nezávislá) řešení rekurentní rovnice (9H).
- Má-li charakteristická rovnice jeden dvojnásobný kořen  $\alpha$ , pak posloupnosti  $\{\alpha^n\}_{n=0}^{+\infty}$  a  $\{n\alpha^n\}_{n=0}^{+\infty}$  jsou dvě (lineárně nezávislá) řešení rekurentní rovnice (9H).
- Má-li charakteristická rovnice dva komplexně sdružené kořeny  $t_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , pak je nutné jeden z kořenů (např.  $t_1$ ) vyjádřit v goniometrickém tvaru, tj.  $t_1 = |t_1|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Posloupnosti  $\{|t_1|^n \cos n\varphi\}_{n=0}^{+\infty}$  a  $\{|t_1|^n \sin n\varphi\}_{n=0}^{+\infty}$  jsou potom dvě (lineárně nezávislá) řešení rekurentní rovnice (9H).

Množina všech řešení rekurentní rovnice (9H) je v každém z případů rovna množině všech lineárních kombinací výše uvedených lineárně nezávislých řešení.

**Příklad 6** Najděte všechna řešení rekurentní rovnice  $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ .

Nejprve řešíme charakteristickou rovnici, tj. rovnici  $t^2 = 5t - 6$ . Tato rovnice má dva různé reálné kořeny  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 3$ . Podle předchozího jsou posloupnosti  $\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}$  a  $\{3^n\}_{n=0}^{+\infty}$  dvě lineárně nezávislá řešení naší rekurentní rovnice a všechna řešení této rovnice je možné popsat prostřednictvím všech možných lineárních kombinací výše uvedených dvou lineárně nezávislých řešení, tj.

$$x_n = k_1 \cdot 2^n + k_2 \cdot 3^n, \quad \text{kde } k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (\text{tzv. obecné řešení}).$$

**Příklad 7** Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah  $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$  a počáteční podmínky  $x_0 = 0$  a  $x_1 = 1$ .

Charakteristická rovnice  $t^2 = 4t - 4$  má jeden dvojnásobný kořen  $t_{1,2} = 2$ . Obecné řešení rekurentní rovnice je tedy tvaru

$$x_n = k_1 \cdot 2^n + k_2 \cdot n2^n, \quad \text{kde } k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Z počátečních podmínek vyplývá, že

$$\begin{aligned}k_1 &= 0, \\2k_1 + 2k_2 &= 1,\end{aligned}$$

odkud  $k_1 = 0$  a  $k_2 = \frac{1}{2}$ . Celkem tedy pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  máme

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot n2^n = n2^{n-1}.$$

**Příklad 8** Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah  $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$  a počáteční podmínky  $x_0 = -1$  a  $x_1 = 1$ .

Charakteristická rovnice  $t^2 = 2t - 2$  má dva komplexně sdružené kořeny  $t_1 = 1 + i$ ,  $t_2 = 1 - i$ . Snadno se přesvědčíme, že  $t_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  a tedy obecné řešení rekurentní rovnice je tvaru

$$x_n = k_1 \cdot \sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} + k_2 \cdot \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4}, \quad \text{kde } k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Rozborem počátečních podmínek bychom dostali, že  $k_1 = -1$  a  $k_2 = 2$ . Celkem tedy pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  máme

$$x_n = \sqrt{2^n} \left( 2 \sin \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{4} \right).$$

Při řešení nehomogenních rekurentních rovnic druhého řádu lze postupovat podobně, jako tomu bylo u rovnic prvního řádu.

**Příklad 9** Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah  $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + 1$  a počáteční podmínky  $x_0 = 1$  a  $x_1 = 2$ .

Definujme novou posloupnost  $y_n = x_n - c$ , kde  $c$  je vhodná konstanta. Vztah  $x_n = y_n + c$  dosadíme do rekurentní rovnice ze zadání a dostaneme  $(y_{n+2} + c) = 4(y_{n+1} + c) - 4(y_n + c) + 1$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 4y_n - c + 1$ , odkud je vidět, že je vhodné volit  $c = 1$ . Pak totiž dostáváme homogenní rovnici  $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 4y_n$  s počátečními podmínkami  $y_0 = x_0 - c = 0$  a  $y_1 = x_1 - c = 1$ . Řešením takovéto rovnice je  $y_n = n2^{n-1}$  (viz příklad 7), odkud pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  dostáváme

$$x_n = y_n + c = n2^{n-1} + 1.$$

Někdy se však stane, že výše uvedený postup selže. Na následujících dvou příkladech si ukážeme, jak v takovém případě postupovat.

**Příklad 10** Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah  $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + 1$  a počáteční podmínky  $x_0 = 0$  a  $x_1 = 1$ .

Definujme novou posloupnost  $y_n = x_n - c$ , kde  $c$  je vhodná konstanta. Vztah  $x_n = y_n + c$  dosadíme do rekurentní rovnice ze zadání a dostaneme  $(y_{n+2} + c) = 3(y_{n+1} + c) - 2(y_n + c) + 1$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + 1$ . Tato rovnice je naprosto stejná, jako rovnice v zadání. Proto tento postup nepovede k cíli.

Zkusme tedy zavést novou posloupnost  $y_n$  jiným způsobem, přesněji  $y_n = x_n - cn$ , kde  $c \in \mathbb{R}$  je vhodně zvolené číslo. Abychom zjistili, jak zvolit číslo  $c$ , dosadíme vztah  $x_n = y_n + cn$  do rekurentní rovnice ze zadání. Obdržíme tedy  $(y_{n+2} + c(n+2)) = 3(y_{n+1} + c(n+1)) - 2(y_n + cn) + 1$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + c + 1$ . Odtud vidíme, že je vhodné volit  $c = -1$ . Pak totiž dostaneme homogenní rovnici  $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$  s počátečními podmínkami  $y_0 = x_0 - c \cdot 0 = 0$  a  $y_1 = x_1 - c \cdot 1 = 2$ . Řešením této homogenní úlohy (viz postup využívající charakteristickou rovnici) obdržíme  $y_n = 2^{n+1} - 2$ , odkud pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$x_n = y_n + cn = 2^{n+1} - 2 - n.$$

Ukažme si ještě jeden příklad.

**Příklad 11** Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah  $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 1$  a počáteční podmínky  $x_0 = 0$  a  $x_1 = 1$ .

Definujme novou posloupnost  $y_n = x_n - c$ , kde  $c$  je vhodná konstanta. Vztah  $x_n = y_n + c$  dosadíme do rekurentní rovnice ze zadání a dostaneme  $(y_{n+2} + c) = 2(y_{n+1} + c) - (y_n + c) + 1$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + 1$ . Tato rovnice je naprosto stejná, jako rovnice v zadání. Proto tento postup nepovede k cíli.

Zkusme tedy opět zavést novou posloupnost  $y_n = x_n - cn$ , kde  $c \in \mathbb{R}$  je vhodně zvolené číslo. Abychom zjistili, jak zvolit číslo  $c$ , dosadíme vztah  $x_n = y_n + cn$  do rekurentní rovnice ze zadání. Obdržíme tedy  $(y_{n+2} + c(n+2)) = 2(y_{n+1} + c(n+1)) - (y_n + cn) + 1$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + 1$ . Vidíme, že tato rovnice je opět stejná jako rovnice v zadání.

Zkusme zavést posloupnost  $y_n$  ještě jinak. Definujme  $y_n = x_n - cn^2$ , kde  $c \in \mathbb{R}$  je vhodné číslo. Dosadíme vztah  $x_n = y_n + cn^2$  do rekurentní rovnice ze zadání. Obdržíme  $(y_{n+2} + c(n+2)^2) = 2(y_{n+1} + c(n+1)^2) - (y_n + cn^2) + 1$ , což je ekvivalentní s rovnicí  $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n - 2c + 1$ . Odtud vidíme, že je vhodné volit  $c = \frac{1}{2}$ . Pak totiž dostaneme homogenní rovnici  $y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n$  s počátečními podmínkami  $y_0 = x_0 - c \cdot 0^2 = 0$  a  $y_1 = x_1 - c \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$ . Řešením této homogenní úlohy obdržíme  $y_n = \frac{1}{2}n$ , odkud pro každé  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  dostaneme

$$x_n = y_n + cn^2 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

*Poznámka.* Novou posloupnost  $y_n$  zavádíme obecně vztahem  $y_n = x_n - cn^k$ , kde  $k$  představuje násobnost kořenu 1 charakteristické rovnice  $t^2 = pt + q$ . Pokud tedy číslo 1 není kořenem charakteristické rovnice, tj. v případě  $p + q \neq 1$ , zavedeme novou posloupnost vztahem  $y_n = x_n - cn^0 = x_n - c$  (viz příklad 9). Pokud je číslo 1 jednonásobným kořenem charakteristické rovnice, tj. v případě  $p + q = 1$  a současně  $p \neq 2$ , zavedeme novou posloupnost vztahem  $y_n = x_n - cn^1 = x_n - cn$  (viz příklad 10). Konečně pokud je číslo 1 dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, tj. v případě  $p = 2$  a současně  $q = -1$  (jediný případ), zavedeme novou posloupnost vztahem  $y_n = x_n - cn^2$  (viz příklad 11).

## 6 Příklad 6

Řekneme, že přirozené číslo  $x$  *dělí* přirozené číslo  $y$  (zapisujeme  $x \mid y$ ), jestliže existuje takové přirozené číslo  $k$ , že  $y = k \cdot x$ . Říkáme také, že  $x$  je *dělitelem* čísla  $y$ . Například 5 dělí 15, ale 4 nedělí 15, stručně  $5 \mid 15$  a  $4 \nmid 15$ .

Dále si všimněte, že dělitelnost jsme definovali jen pro přirozená čísla. Stejným způsobem bychom mohli nadefinovat dělení i pro celá čísla. V takovém případě například 7 dělí 14, ale také 7 dělí  $-7$ . Čísla 1 a  $-1$  jsou dělitelem každého celého čísla a nulu dělí každé celé číslo  $x$ , protože  $0 = 0 \cdot x$ . V dalším textu se omezíme na dělitelnost přirozených čísel.

*Společný dělitel* celých čísel  $x$  a  $y$  je každé takové celé číslo, které dělí  $x$  i  $y$ . Největší společný dělitel celých čísel  $x$  a  $y$  je takový společný dělitel  $d$ , že každý jiný společný dělitel čísel  $x$  i  $y$  je také dělitelem  $d$ . Největšího společného dělitele čísel  $x$  a  $y$  budeme značit symbolem  $(x, y)$ . Jestliže největší společný dělitel  $(x, y) = 1$ , říkáme, že přirozená čísla  $x$  a  $y$  jsou *nesoudělná*.

Podobně zavedeme společný násobek čísel. *Společný násobek* celých čísel  $x$  a  $y$  je každé takové celé číslo, které má dělitele  $x$  i  $y$ . Nejmenší společný násobek celých čísel  $x$  a  $y$  je takový společný násobek  $n$ , který je dělitelem všech společných násobků čísel  $x$  a  $y$ . Nejmenší společný násobek čísel  $x$  a  $y$  budeme značit symbolem  $[x, y]$ .

*Příklad 1.* Dokažte, že největší společný dělitel  $(x, y)$  a nejmenší společný násobek  $[x, y]$  libovolných dvou přirozených čísel  $x$  a  $y$  splňují rovnost  $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$ .

V důkazu využijeme následující tvrzení.

**Lemma 1** Pro každá dvě přirozená čísla platí  $\min\{u, v\} + \max\{u, v\} = u + v$ .

Nejprve dokážeme platnost Lemmatu 1. Rozlišíme dva případy

- pro  $u = v$  uvedená rovnost platí, neboť

$$L = \min\{u, v\} + \max\{u, v\} = \min\{u, u\} + \max\{u, u\} = u + u = u + v = P.$$

- pro  $u \neq v$  můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $u < v$ . Dokazovaná rovnost pak platí, protože

$$L = \min\{u, v\} + \max\{u, v\} = u + v = P.$$

Tím je platnost Lemmatu 1 dokázána.

Dále využijeme známého faktu, že každé přirozené číslo větší než 1 má (až na pořadí součinitelů) jednoznačný rozklad na součin prvočísel (tzv. *prvočíselný rozklad*). (Nyní snadno nahlédneme, proč není číslo 1 zahrnováno mezi prvočísla. Jinak by rozklad na součin prvočísel nebyl jednoznačný, například číslo 6 by mělo více možných rozkladů  $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1^7 \cdot 2 \cdot 3 = \dots$ )

Máme dána přirozená čísla  $x, y \geq 2$ . Označíme

$$x = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}, \quad y = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k},$$

kde  $p_1, p_2, \dots, p_k$  jsou *všechna* prvočísla, která se vyskytují v prvočíselném rozkladu obou čísel  $x, y$ . Některá z čísel  $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k$  mohou být nulová.

Například pro  $x = 252, y = 360$  dostaneme

$$x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1, \quad y = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0.$$

Není těžké si rozmyslet, že  $(x, y) \mid x, (x, y) \mid y, x \mid [x, y], y \mid [x, y], [x, y] \mid x \cdot y$ , a proto prvočíselný rozklad všech čísel  $(x, y), x, y, [x, y], x \cdot y$  neobsahuje jiná prvočísla než  $p_1, p_2, \dots, p_k$  a žádná jiná. Podle definice společného dělitele víme, že  $(x, y) \mid x$  a  $(x, y) \mid y$  a proto platí

$$(x, y) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k},$$

kde  $d_i \leq \min\{u_i, v_i\}$  pro  $i = 1, 2, \dots, k$ . Protože  $(x, y)$  je největší společný dělitel (s touto vlastností), tak navíc  $d_i = \min\{u_i, v_i\}$  pro  $i = 1, 2, \dots, k$ . Podobně zdůvodníme, že

$$[x, y] = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k},$$

kde  $l_i = \max\{u_i, v_i\}$  pro  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Nyní dosadíme a upravíme jednotlivé prvočíselné rozklady

$$A = x \cdot y = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k} \cdot p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k} = p_1^{u_1+v_1} p_2^{u_2+v_2} \cdots p_k^{u_k+v_k},$$

$$\begin{aligned} B = (x, y) \cdot [x, y] &= p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k} \cdot p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k} = p_1^{d_1+l_1} p_2^{d_2+l_2} \cdots p_k^{d_k+l_k} = \\ &= p_1^{\min\{u_1, v_1\} + \max\{u_1, v_1\}} p_2^{\min\{u_2, v_2\} + \max\{u_2, v_2\}} \cdots p_k^{\min\{u_k, v_k\} + \max\{u_k, v_k\}}. \end{aligned}$$

Podle dokázaného Lemmatu 1 je

$$\min\{u_i, v_i\} + \max\{u_i, v_i\} = u_i + v_i,$$

pro každé  $i = 1, 2, \dots, k$ . Proto  $A = B$ , tj.  $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$  a tím je důkaz tvrzení uzavřen.

*Příklad 2.* Určete, pro která přirozená čísla  $a, b, c$  platí  $[a, c] + [b, c] = (a + b)c$ . Nejprve si všimneme, že z definice největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku plyne následující soustava nerovností.

$$(x, y) \leq \min\{x, y\} \leq \max\{x, y\} \leq [x, y] \leq x \cdot y.$$

Nyní protože

$$[a, c] \leq a \cdot c, \quad [b, c] \leq b \cdot c, \quad (10)$$

můžeme obě nerovnosti sečíst a platí

$$[a, c] + [b, c] \leq a \cdot c + b \cdot c = (a + b)c.$$

V zadání se ptáme, kdy nastane rovnost. Rovnost nastane pouze v případě, když obě nerovnosti (10) přejdou v rovnosti  $[a, c] = a \cdot c$  a současně  $[b, c] = b \cdot c$ .

Kdy je nejmenší společný násobek dvou čísel  $x, y$  je roven jejich součinu? To vyplývá z předchozího příkladu. Jestliže z rovnice  $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$  vyjádříme  $[x, y]$ , dostaneme

$$[x, y] = \frac{x \cdot y}{(x, y)}.$$

Rovnost  $[x, y] = x \cdot y$  nastane, jestliže  $(x, y) = 1$ , tedy pokud jsou čísla  $x, y$  nesoudělná. Rovnost v zadání nastane pro každá taková tři přirozená čísla  $a, b, c$ , kdy  $a, c$  jsou nesoudělná a současně  $b, c$  jsou nesoudělná. Proto všechny hledané trojice přirozených čísel jsou takové, kdy  $c$  je nesoudělné s oběma čísly  $a, b$ .

Máme-li dáno přirozené číslo  $a$  s prvočíselným rozkladem

$$a = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k},$$

tak všechna přirozená čísla nesoudělná s  $x$  jsou právě ta čísla, která neobsahují ve svém prvočíselném rozkladu žádné z prvočísel  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Přehledně shrneme vlastnosti čísla  $c$ . Pokud máme dána čísla  $a, b$ , sestavíme množinu *všech* prvočísel z rozkladu *obou* čísel  $a, b$ .

$$X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

Množinu všech přípustných čísel pro  $c$ , která jsou větší než 1 a menší nebo rovna nějakému pevně zvolenému  $K$ , můžeme dostat postupem mírně připomínajícím Eratosthenovo síto. Z množiny  $M = \{2, 3, \dots, K\}$  vynecháme všechny násobky prvočísla  $p_1$ , všechny násobky prvočísla  $p_2$ , atd. až všechny násobky prvočísla  $p_n$ . Dostaneme množinu  $M'$ . Je zajímavé si uvědomit, že výsledná množina  $M'$  nemusí (na rozdíl od množiny získané Eratosthenovým sítem) obsahovat pouze prvočísla. Může obsahovat libovolná složená čísla, která ovšem nejsou složena z prvočísel množiny  $X$ . Navíc v  $M'$  není žádné prvočíсло, které je v množině  $X$ .

*Příklad 3. Určete, kolik (uspořádaných) dvojic přirozených čísel  $a, b$  splňuje rovnici*

$$a) \quad [a, 70] + [b, 70] = 210, \quad b) \quad \frac{1}{[a, 30]} + \frac{1}{[b, 30]} = \frac{1}{30}.$$

*Část a)*

Nejprve si všimneme, že obě čísla  $[a, 70]$  i  $[b, 70]$  jsou kladná celá čísla, která v součtu dají 210. Každé z čísel  $[a, 70]$  i  $[b, 70]$  je proto menší než 210 a říhloha bude mít konečně mnoho řešení. Mohli bychom najít řešení hrubou silou (s využitím počítače probrat všechny možnosti čísel  $a, b$  mezi 1 a 210. My ale ukážeme elegantnější řešení, ve kterém využijeme naše znalosti o rozkladu čísel na součin prvočísel.

Číslo  $[a, 70]$  je násobek 70 (je to společný násobek  $a$  a 70). Můžeme proto psát, že  $[a, 70] = 70k$  pro nějaké přirozené číslo  $k$ . (I některá záporná čísla a číslo 0 jsou násobky 70, avšak ne pro přirozené číslo  $a$ .) Podobně zdůvodníme, že  $[b, 70] = 70l$  pro nějaké přirozené číslo  $l$ . Výrazy dosadíme do vztahu a) a dostaneme

$$\begin{aligned} [a, 70] + [b, 70] &= 210 \\ 70k + 70l &= 210 \\ 70(k + l) &= 210 \\ k + l &= 3. \end{aligned}$$

Protože  $k$  i  $l$  jsou přirozená čísla, tak  $k = 1$  a  $l = 2$  nebo naopak. Bez ísmy na obecnosti budeme předpokládat, že  $k = 1$  a  $l = 2$ . *Pozor! V závěru nesmíme zapomenout na druhou sadu řešení vyplývající z možnosti  $k = 2$  a  $l = 1$ .* Pro  $k = 1$  je  $[a, 70] = 70$  a pro  $l = 2$  je  $[b, 70] = 140$ . Protože  $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$  a  $[a, 70] = 70$ , tak  $a$  může ve svém rozkladu na součin prvočísel obsahovat pouze 2, 5, 7. Platí

$$a = 2^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3},$$

kde  $0 \leq n_1, n_2, n_3 \leq 1$ . Hodnoty  $n_1, n_2, n_3$  můžeme zvolit libovolně, jedná se o nezávislé výběry, proto máme celkem  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  možností. Podobně platí

$$b = 2^{m_1} 5^{m_2} 7^{m_3},$$

kde  $0 \leq m_1 \leq 2$ ,  $0 \leq m_2, m_3 \leq 1$ . Protože ale  $[b, 70] = 140$ , tak  $b$  musí ve svém rozkladu na součin prvočísel obsahovat  $4 = 2^2$ , proto je  $m_1 = 2$  a čísla  $m_2, m_3$  můžeme zvolit libovolně. Celkem máme  $2 \cdot 2 = 4$  možnosti.

Všech (nezávislých!) výběrů pro  $a$  i  $b$  je tak  $4 \cdot 8 = 32$  pro  $k = 1$ ,  $l = 2$ . V případě  $k = 2$ ,  $l = 1$  máme dalších 32 možností. Rovnici a) splňuje celkem 64 různých uspořádaných dvojic čísel  $a, b$ .

*Část b)*

Opět si nejprve všimneme, že pokud je  $\frac{1}{[a, 30]} < \frac{1}{60}$  a současně  $\frac{1}{[b, 30]} < \frac{1}{60}$ , tak v rovnici b) nemůže nastat rovnost. Nejmenší společný násobek  $[a, 30]$ , ani  $[b, 30]$

nemohou být libovolně veliké a protože existuje pouze konečně mnoho přirozených čísel menších než 60, tak rovnice b) má opět pouze konečně mnoho řešení.

Podobně jako v předchozí části si uvědomíme, že  $[a, 30]$  i  $[b, 30]$  jsou násobky čísla 30. Můžeme psát  $[a, 30] = 30k$  a  $[b, 30] = 30l$  pro nějaká přirozená čísla  $k, l$ . Pokud by bylo  $k = 1$ , tak  $\frac{1}{[a, 30]} = \frac{1}{30}$ . Navíc  $\frac{1}{[b, 30]} > 0$  a v rovnici b) nemůže nastat rovnost. Proto  $k > 1$  a ze symetrie úlohy současně plyne  $l > 1$ .

Dostáváme, že  $[a, 30] \geq 60$  a současně  $[b, 30] \geq 60$ . Můžeme psát

$$\frac{1}{[a, 30]} + \frac{1}{[b, 30]} \leq \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}.$$

Porovnáním se zadanou rovností b) ihned vidíme, že musí platit  $[a, 30] = [b, 30] = 60$ . Protože  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  a  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ , tak prvočíselné rozklady čísel  $a, b$  jsou

$$a = 2^2 3^{n_1} 5^{n_2}, \quad b = 2^2 3^{m_1} 5^{m_2},$$

kde  $0 \leq n_1, n_2, m_1, m_2 \leq 1$ . Jedná se o nezávislé výběry, proto máme celkem  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$  možností, jak zvolit dvojici  $a, b$ . Rovnice b) má celkem 16 řešení.

# Návody k úlohám domácí části I. kola 59.ročníku MO kategorie B

## ***Soutěžní úloha 1***

*Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2 009, ve druhé 2 010 a v poslední 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru.*

## **NÁVODNÉ ÚLOHY**

1. V misce je 100 bílých a 110 černých kuliček. Hráč může v každém svém tahu odebrat jednu bílou nebo jednu černou nebo jednu bílou spolu s jednou černou kuličkou. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Vyhrává ten, po jehož tahu zůstane miska prázdná. Popište vítěznou strategii pro některého hráče.

### **ŘEŠENÍ.**

Podívejme se na celou hru od konce, tedy od posledního tahu a všimněme si, které možnosti vedou k výhře a které vedou k prohře hráče. Označme si  $(a, b)$  momentální pozici hry, kde  $a$  bude označovat zbývajících počet bílých a  $b$  zbývajících počet černých kuliček. Zanechá-li některý hráč po svém tahu pozici  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  nebo  $(1,1)$ , pak prohrává. Podobně hráč dopadne, zanechá-li po svém tahu pozici  $(1,2)$  nebo  $(2,1)$  (protihráč hru posune do pozice  $(0,2)$  nebo  $(2,0)$ ). Pozice, kterou musí hráč zanechat aby vyhrál je tedy  $(2,2)$ , případně  $(2,0)$  nebo  $(0,2)$  – tím donutí protihráče k jedné z prohrávajících pozic z předchozího odstavce. K některé z těchto pozic se hráč může dopracovat, pokud bude v každém tahu udržovat sudý počet kuliček od každé barvy. Vzhledem k tomu, že počáteční stav je 100 bílých a 110 černých kuliček v misce, může tuto strategii uplatnit hráč, který nezačíná.

2. Na hromádce je 2009 zápalek. V každém tahu může hráč odebrat jednu nebo dvě zápalky. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Ten, který vezme poslední zápalku, prohrává. Popište vítěznou strategii pro některého hráče.

### **ŘEŠENÍ.**

Úlohu můžeme opět jednoduše vyřešit, zamyslíme-li se nad ní od posledního tahu.

Hru zjevně vyhraje hráč, který po svém tahu zanechá pouze jednu zápalku. Hráč naopak prohraje, pokud po svém tahu nechá soupeři takový počet zápalek, že soupeř může po svém tahu zanechat jednu zápalku, tzn. hráč prohraje pokud po svém tahu zanechá dvě nebo tři zápalky. Pokud ale hráč po svém tahu zanechá čtyři zápalky, přinutí naopak protihráče k jedné z proherních variant (2 nebo 3 zápalky) a vyhrává. Dále můžeme postupovat zcela obdobně, tedy počty zápalek vedoucí k výhře jsou  $1, 4, 7, \dots$ , k prohře  $2, 3, 5, 6, 8, 9, \dots$ .

Řešením je tedy zanechávat po každém svém tahu  $(3k + 1)$  zápalek,  $k \in N_0$ .

Tuto strategii je možné uplatnit, neboť v každém kole je možné odebrat dvě až čtyři (tedy i tři) zápalky.

Vzhledem k tomu, že

$$2009 = 3 \cdot 669 + 2,$$

tuto strategii může uplatnit začínající hráč, pokud v prvním tahu odebere jednu zápalku. Pokud ale začne hru jiným tahem, může vítěznou strategii uplatnit jeho soupeř.

3. Na jedné hromádce je 2009, na druhé 2020 zápalek. V každém tahu si hráč zvolí jednu hromádku a odebere z ní jednu nebo dvě zápalky. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Vyhrává ten, po jehož tahu nezůstane na stole žádná zápalka. Popište vítěznou strategii pro některého hráče.

ŘEŠENÍ.

Zabývejme se hrou opět od konce a označme si  $(a, b)$  momentální pozici hry, kde  $a$  označuje počet zápalek na první a  $b$  počet zápalek na druhé hromádce.

Jestliže vyhrává hráč, po jehož tahu nezůstane na stole žádná zápalka, pak určitě jednou z výherních variant je zanechat po svém tahu pozici  $(1,1)$  (protihráč po sobě musí zanechat pozici  $(1,0)$  nebo  $(0,1)$ ). Podobně je výherní také varianta  $(2,2)$  (soupeř zanechá buď  $(0,2)$ ,  $(2,0)$  – jasné ukončení dalším tahem nebo pozici  $(1,2)$ ,  $(2,1)$ , kterou lze převést na pozici  $(1,1)$ , která je výherní). Stejně tak lze ukázat, že výherní je pozice  $(3,3)$ ,  $(4,4)$ ,  $\dots$ , tedy obecně pozice  $(k, k)$ , kde  $k \in N_0$ .

Naopak – prohrávající jsou pozice, které soupeř může převést na pozice  $(k, k)$ , tedy pozice  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(2,0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,1)$ ,  $(1,3)$ ,  $(3,1)$ ,  $\dots$ .

Jak vidno,  $(k, k)$  ale není jediná vítězná možnost. Lze si snadno rozmyslet, že další možnosti, které donutí soupeře k prohrávajícím pozicím z předchozího odstavce jsou  $(0,3)$ ,  $(3,0)$ ,  $(1,4)$ ,  $(4,1)$ ,  $\dots$ .

Pokud dáme všechny předchozí úvahy dohromady, dojdeme k výherní strategii zanechávat po každém tahu takové počty zápalek, aby jejich rozdíl byl dělitelný třemi.

$$2020 - 2009 = 11$$

Tuto strategii může tedy uplatnit první hráč v případě, že v prvním tahu odebere dvě zápalky z první nebo jednu zápalku z druhé hromádky. Jestliže ale začne hru jinak, může výherní strategii uplatnit druhý hráč.

### Soutěžní úloha 2

*Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístné a právě dva dvojmístné. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána.*

## TEORIE

Zajímá nás, kolik má dané číslo dělitelů.

*Příklad: Určete počet kladných dělitelů čísla 72.*

Prvočíselný rozklad čísla 72 má tvar  $72 = 2^3 \cdot 3^2$ . Dělitelé čísla 72 (kromě čísla 1) budou mít tedy prvočíselný rozklad složený pouze z činitelů 2 a 3, tzn. budou ve tvaru  $2^a \cdot 3^b$ , kde  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $b \in \{0, 1, 2\}$ :

|       | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $3^0$ | 1     | 2     | 4     | 8     |
| $3^1$ | 3     | 6     | 12    | 24    |
| $3^2$ | 9     | 18    | 36    | 72    |

Číslo  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  má tedy  $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$  dělitelů.

Při zobecnění předchozí úvahy snadno dospějeme k závěru, že počet kladných dělitelů čísla  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$  je  $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1)$ .

## NÁVODNÉ ÚLOHY

1. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má přesně 2009 kladných dělitelů.

ŘEŠENÍ.

Prvočíselný rozklad čísla 2009 má tvar

$$2009 = 7^2 \cdot 41$$

Číslo, které má 2009 kladných dělitelů lze tedy vyjádřit v některém z následujících tvarů:

- (a)  $x = p_1^{k_1}$ , kde  $k_1 + 1 = 2009$ , tedy  $k_1 = 2008$ . Nejmenší číslo, které lze zapsat v tomto tvaru je  $2^{2008} \approx 2,94 \cdot 10^{604}$ .
- (b)  $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$ , kde  $(k_1 + 1)(k_2 + 1) = 49 \cdot 41$ , tedy  $k_1 = 48$ ,  $k_2 = 40$ . Nejmenší číslo, které lze zapsat v tomto tvaru je  $2^{48} \cdot 3^{40} \approx 3,42 \cdot 10^{33}$
- (c)  $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ , kde  $(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) = 41 \cdot 7 \cdot 7$ , tedy  $k_1 = 40$ ,  $k_2 = 6$ ,  $k_3 = 6$ . Nejmenší číslo, které lze zapsat v tomto tvaru je  $2^{40} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \approx 1,25 \cdot 10^{19}$  a to je i hledané číslo.

2. Která čtyřmístná čísla mají nejvíce dělitelů?

ŘEŠENÍ.

Z předchozího již víme, že počet kladných dělitelů čísla  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$  je  $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1)$ . Zřejmě tedy největší počet dělitelů bude mít číslo, v jehož prvočíselném rozkladu se bude vyskytovat největší počet různých prvočísel. Hledáme tedy čtyřciferné číslo s touto vlastností.

Násobíme-li postupně nejmenší různá prvočísla, zjistíme, že součin

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

Toto číslo již nelze vynásobit nejbližším dalším prvočíslem 13, pokud výsledkem má být čtyřciferné číslo.

Můžeme jej ale ještě vynásobit číslem  $2^2$  a tím ještě zvýšit počet dělitelů, takže obdržíme číslo

$$x = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,$$

které má  $(3 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 64$  kladných dělitelů.

Stejný počet dělitelů má také číslo

$$7560 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

v jehož prvočíselném rozkladu je méně různých prvočísel, což je ale kompenzováno celkově větším počtem prvočísel v rozkladu.

3. Najděte všechna lichá čtyřmístná čísla, která mají více než 10 kladných dělitelů, z nichž aspoň 30% jsou druhé mocniny přirozených čísel.

# ŘEŠENÍ.

Je-li hledané číslo liché, pak jeho prvočíselný rozklad musí obsahovat pouze lichá prvočísla. Předpokládejme nejprve, že hledané číslo je ve tvaru  $x = p_1^{k_1}$ . Má-li mít toto číslo více než 10 kladných dělitelů, pak  $k_1 \geq 10$ . Tomuto ale nevyhovuje žádné čtyřmístné číslo, neboť  $3^{10} = 59049$ .

Předpokládejme tedy, že hledáme číslo ve tvaru  $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ . První možnost, která vyhovuje zadání je  $x = p_1^3 \cdot p_2^2$ . Číslo v tomto tvaru má 12 kladných dělitelů z nichž čtyři ( $1, p_1^2, p_1^2 \cdot p_2^2$ ) jsou druhou mocninou přirozeného čísla. Z toho vyplývají následující řešení:

|                         |                        |                        |
|-------------------------|------------------------|------------------------|
| $3^3 \cdot 7^2 = 1323$  | $5^3 \cdot 3^2 = 1125$ | $7^3 \cdot 3^2 = 3087$ |
| $3^3 \cdot 11^2 = 3267$ | $5^3 \cdot 7^2 = 6125$ | $7^3 \cdot 5^2 = 8575$ |
| $3^3 \cdot 13^2 = 4563$ |                        |                        |
| $3^3 \cdot 17^2 = 7803$ |                        |                        |
| $3^3 \cdot 19^2 = 9747$ |                        |                        |

Tvar čísla  $x = p_1^3 \cdot p_2^3$  nemá dostatečný počet dělitelů ve tvaru druhých mocnin, proto dalším možným tvarem čísla je  $x = p_1^4 \cdot p_2^2$ , který má 15 dělitelů, z nichž je 6 druhou mocninou přirozeného čísla. Další možnosti jsou tedy:

|                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| $3^4 \cdot 5^2 = 2025$  | $5^4 \cdot 3^2 = 5625$ |
| $3^4 \cdot 7^2 = 3969$  |                        |
| $3^4 \cdot 11^2 = 9801$ |                        |

Lze si snadno rozmyslet, že posledním možným tvarem hledaného čísla, v jehož prvočíselném rozkladu se vyskytují dvě prvočísla, je  $x = p_1^5 \cdot p_2^2$ . Toto číslo má 18 kladných dělitelů, z nichž 6 je druhou mocninou přirozeného čísla. Jediná možnost vyplývající z tohoto rozkladu je

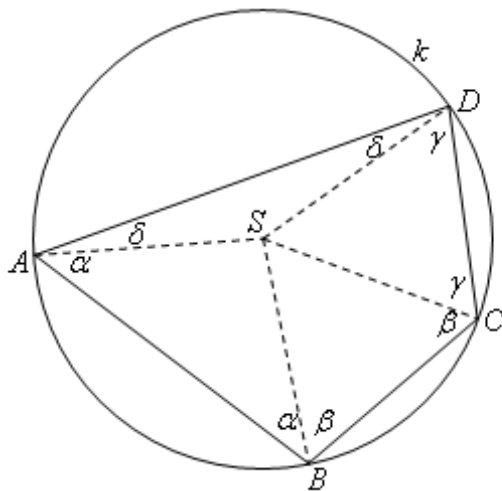
$$3^5 \cdot 5^2 = 6075$$

Nyní předpokládejme, že je hledané číslo ve tvaru  $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$ . První možnosti, která má dostatečný počet dělitelů a vyhovuje zadání je  $x = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2$ . Pokud ale má být hledané číslo čtyřciferné, nepřichází ani tato možnost do úvahy, neboť  $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 11025$ . Je tedy zřejmé, že žádná další řešení už neexistují

### Soutěžní úloha 3

V rovině je dána úsečka  $AB$ . Sestrojte rovnoběžník  $ABCD$ , pro jehož středy stran  $AB$ ,  $CD$ ,  $DA$  označené po řadě  $K$ ,  $L$ ,  $M$  platí: body  $A$ ,  $B$ ,  $L$ ,  $D$  leží na jedné kružnici a rovněž body  $K$ ,  $L$ ,  $D$ ,  $M$  leží na jedné kružnici.

### TEORIE



Čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici označujeme jako *tětivový*. Pro *tětivový* čtyřúhelník platí, že součet dvou protilehlých vnitřních úhlů je stejně velký jako součet zbylých (protilehlých) vnitřních úhlů a tento součet je roven  $180^\circ$ :

Součet úhlů u vrcholů  $A$ ,  $C$  je roven  $\alpha + \delta + \beta + \gamma$

Součet úhlů u vrcholů  $B$ ,  $D$  je roven  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$

Tyto součty jsou rovny  $180^\circ$ , neboť součet všech úhlů ve čtyřúhelníku je roven  $360^\circ$  (stačí si uvědomit, že úhlopříčkou lze čtyřúhelník rozdělit na dva trojúhelníky).

### NÁVODNÉ ÚLOHY

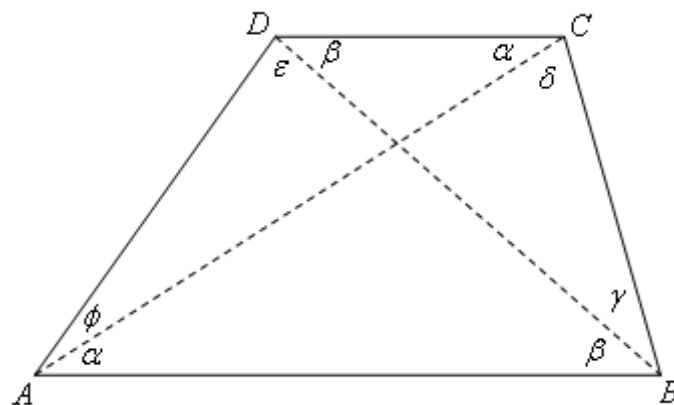
1. Dokažte, že lichoběžníku se dá opsat kružnice, právě když je rovnoramenný.

ŘEŠENÍ.

Jedná se lichoběžník, tedy  $AB \parallel CD$  a úhly si můžeme označit následujícím způsobem:

Vycházíme z předpokladu, že lichoběžníku lze opsat kružnice a chceme dokázat, že je rovnoramenný. Tedy, že  $\alpha + \phi = \beta + \gamma$  (viz obrázek).

Lichoběžník je *tětivový*, právě když platí, že součet dvou protilehlých vnitřních úhlů je stejně velký jako součet zbylých vnitřních úhlů, tedy:



$$\alpha + \phi + \alpha + \delta = \beta + \gamma + \beta + \varepsilon .$$

Dále víme, že součet úhlů v trojúhelnících  $ABC$  a  $ACD$  je stejný ( $=180^\circ$ ):

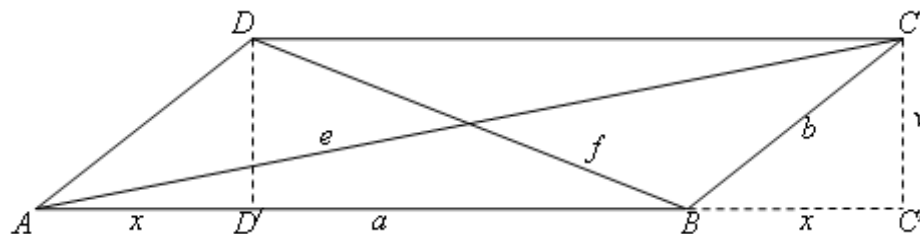
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \phi + \alpha + \beta + \varepsilon .$$

Po odečtení rovnic (1) – (2) a následné úpravě obdržíme vztah, který jsme měli dokázat:

$$\alpha + \phi = \beta + \gamma$$

2. Dokažte, že pro délky stran  $a$ ,  $b$  a délky úhlopříček  $e$ ,  $f$  rovnoběžníku platí  $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$ .

ŘEŠENÍ.



Označme  $D'$  průsečík kolmice spuštěné z bodu  $D$  na stranu  $AB$  a  $C'$  průsečík kolmice spuštěné z bodu  $C$  na přímku  $AB$ . Dále označme  $x = AD' = BC'$  a  $v = CC' = DD'$ .

Trojúhelníky  $ACC'$ ,  $DD'B$  a  $BC'C$  jsou pravoúhlé, můžeme tedy použít Pythagorovu větu:

$$\begin{aligned}\Delta AC'C : \quad |AC'|^2 + |C'C|^2 &= |AC|^2 \\ \Delta DD'B : \quad |D'B|^2 + |D'D|^2 &= |BD|^2 \\ \Delta BC'C : \quad |BC'|^2 + |C'C|^2 &= |BC|^2\end{aligned}$$

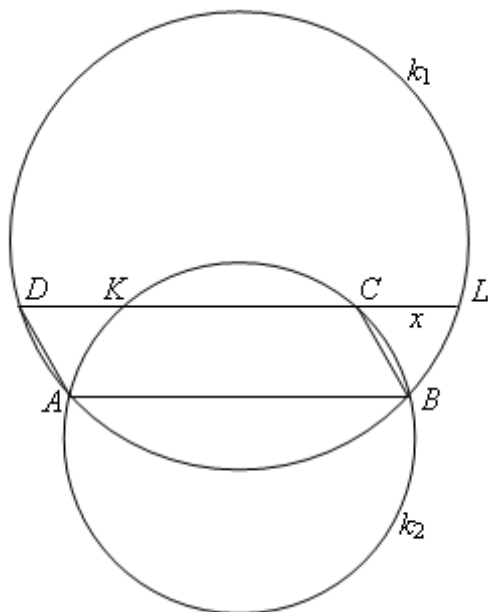
Dosadíme-li, obdržíme:

$$\begin{aligned}(a+x)^2 + v^2 &= e^2 \\ (a-x)^2 + v^2 &= f^2 \\ x^2 + v^2 &= b^2\end{aligned}$$

Dosadíme-li ze třetí rovnice za  $v^2$  do prvních dvou rovnic, pak po úpravě dostaneme

$$\begin{array}{rcl} a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 &= & e^2 \\ a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2 &= & f^2 \\ \hline 2a^2 + 2b^2 &= & e^2 + f^2 \end{array} \quad (+)$$

3. Strana  $AB$  rovnoběžníku  $ABCD$  má délku  $a$ . Kružnice opsaná trojúhelníku  $ABD$  protíná polopřímku opačnou k polopřímce  $CD$  v bodě  $L$ ; označme  $x = |CL|$ . Vypočítejte délku tětivy, kterou přímka  $CD$  vytíná na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .



ŘEŠENÍ.

$k_1$  ... kružnice opsaná trojúhelníku  $ABD$ ,

$k_2$  ... kružnice opsaná trojúhelníku  $ABC$ ,

$|AB| = |CD| = a$ ,  $K = k_2 \cap DC$ .

Jak vyplývá z úlohy 1., lichoběžník  $ABCK$  je tětivový a tudíž rovnoramenný. Proto  $|DK| = |CL| = x$ .

Takže hledaná délka  $|KC| = a - x$ .

#### ***Soutěžní úloha 4***

*Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel.*

### **NÁVODNÉ ÚLOHY**

1. Najděte 20 po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla.

ŘEŠENÍ.

Označme  $a$  první z hledaných čísel. Pak součet dvaceti hledaných čísel lze vyjádřit:

$$\begin{aligned} S &= a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + (a + 18) + (a + 19) = \\ &= 20a + 1 + 2 + \cdots + 18 + 19 = \\ &= 20a + \frac{19}{2} \cdot (1 + 19) = 20a + 10 \cdot 19 = 20a + 190 \end{aligned}$$

Číslo  $S$  je sudé, tedy dělitelné dvojkou, ale z jeho zápisu vyplývá, že není dělitelné číslem 4.

Proto úloha nemá řešení.

2. Najděte 2009 po sobě jdoucích pětímístných čísel, jejichž součet je třetí mocninou přirozeného čísla.

ŘEŠENÍ.

Nechť  $a$  je tentokrát prostřední z 2009 čísel, které tvoří součet. Pak obdobně jako v předchozí úloze můžeme součet hledaných čísel vyjádřit:

$$\begin{aligned} S &= (a - 1004) + (a - 1003) + \cdots + a + \cdots + (a + 1003) + (a + 1004) = \\ &= 2009a \end{aligned}$$

Přičemž tento součet má být mocninou přirozeného čísla, tedy:

$2009a = n^3$  ,  $n \in N$  , což lze pomocí prvočíselného rozkladu čísla 2009 napsat:

$$7^2 \cdot 41 \cdot a = n^3 \text{ , } n \in N$$

Omezme nyní přípustné hodnoty čísla  $a$ . Platí:

$$\begin{aligned} 10000 + 1004 &\leq a \leq 99999 - 1004 \\ 11004 &\leq a \leq 98995 \end{aligned}$$

Podobně můžeme vymezit interval pro neznámé  $n$ :

$$\begin{aligned} 2009 \cdot 11004 &\leq n^3 \leq 2009 \cdot 98995 \\ 281 &\leq n \leq 583 \end{aligned}$$

Z prvočíselného rozkladu čísla 2009 je zřejmé, že číslo  $n$  musí být násobkem čísel 7 a 41, takže

$n = 7 \cdot 41 = 287$  ... vyhovuje podmínce a hodnotu čísla  $a$  v tomto případě vypočteme:

$$\begin{aligned} n^3 &= 7^3 \cdot 41^3 = 2009a = 7^2 \cdot 41 \cdot a \\ a &= 7 \cdot 41^2 = 11767 \end{aligned}$$

A hledaná čísla jsou 10763, 10764, ..., 12770, 12771.

Podmínce, ale vyhovuje ještě řešení:

$$n = 7 \cdot 41 \cdot 2 = 574$$

Pak

$$a = 7 \cdot 41^2 \cdot 2^3 = 94136$$

Hledaná čísla pro tento případ: 93132, 93133, ..., 95139, 95140.

3. Součet druhých mocnin jedenácti po sobě jdoucích trojmístných čísel je násobkem čísla 2009. Najděte tato čísla.

ŘEŠENÍ.

Nechť  $a$  je opět prostřední z hledaných čísel. Pak součet druhých mocnin čísel vyjádříme:

$$\begin{aligned} S &= (a-5)^2 + (a-4)^2 + \cdots a^2 + \cdots + (a+4)^2 + (a+5)^2 \\ S &= (a^2 - 10a + 25) + (a^2 - 8a + 16) + \cdots a^2 + \cdots + (a^2 + 8a + 16) + (a^2 + 10a + 25) \\ S &= 11a^2 + 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \\ S &= 11a^2 + 110 \end{aligned}$$

Tento součet má být násobkem čísla 2009.

$$\begin{aligned}11a^2 + 110 &= k \cdot 2009 \\11(a^2 + 10) &= k \cdot 2009\end{aligned}$$

Nyní opět vymezíme intervaly přípustných hodnot pro  $a$ ,  $k$ .

$$\begin{aligned}100 + 5 &\leq a \leq 999 - 5 \\105 &\leq a \leq 994\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}11 \cdot (105^2 + 10) &\leq k \cdot 2009 \leq 11 \cdot (994^2 + 10) \\61 &\leq k \leq 5409\end{aligned}$$

Omezíme-li navíc přípustné hodnoty dalšími podmínkami, například na dělitelnost, pak po prozkoumání všech zbývajících možností najdeme dvě řešení pro  $a$ :  $a = 513$  nebo  $a = 758$ . Tedy hledaná čísla jsou:

508, 509, ..., 518 nebo

753, 754, ..., 763.

### ***Soutěžní úloha 5***

*Uvnitř kratšího oblouku  $AB$  kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku  $ABC$  je zvolen bod  $D$ . Tětiva  $CD$  protíná stranu  $AB$  v bodě  $E$ . Dokažte, že trojúhelník se stranami délek  $|AE|$ ,  $|BE|$ ,  $|CE|$  je podobný trojúhelníku  $ABD$ .*

### **TEORIE**

*Věty o podobnosti trojúhelníků*

*Věta sss*

Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran, jsou podobné.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

*Věta sus*

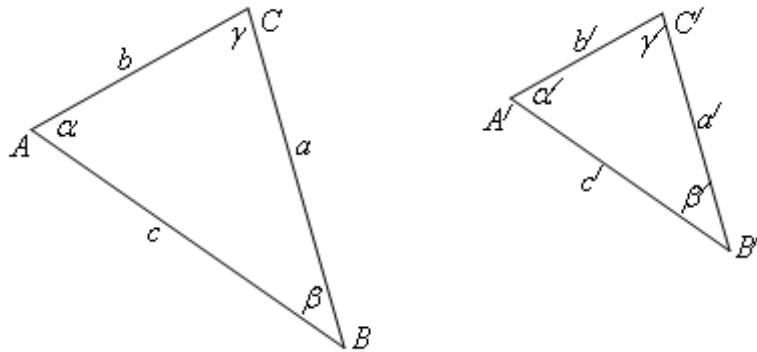
Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou odpovídajících si stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \gamma \cong \gamma'$$

*Věta uu*

Každé dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.

$$\alpha \cong \alpha', \beta \cong \beta'$$



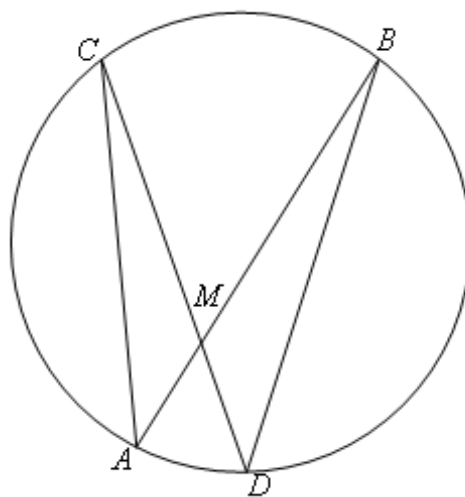
*Věta o obvodových úhlech*

Dva obvodové úhly mají nad stejnou tětivou vždy stejnou velikost.

## NÁVODNÉ ÚLOHY

1. Jestliže se tětivy  $AB$  a  $CD$  kružnice  $k$  protínají v bodě  $M$ , jsou trojúhelníky  $AMC$  a  $DMB$  podobné.

ŘEŠENÍ.



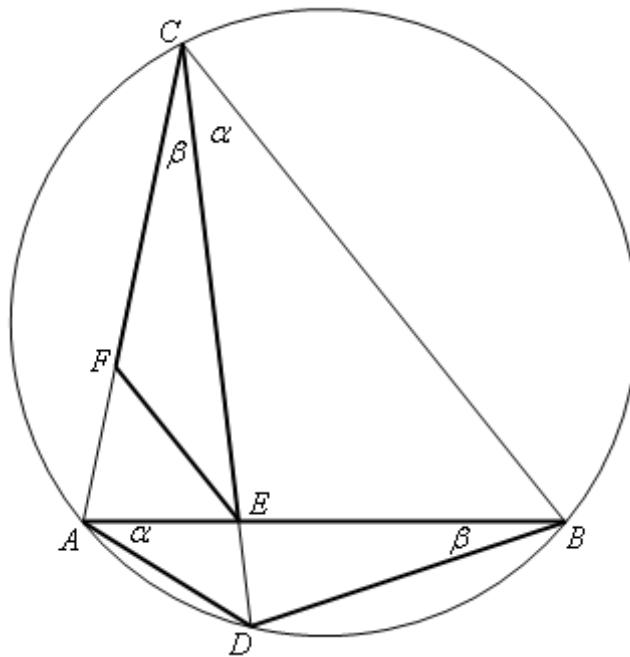
$$|\angle AMC| \cong |\angle DMB| \dots \text{vrcholové úhly u vrcholu } M$$

$|\angle ACD| \cong |\angle ABD|$  ... obvodové úhly nad tětivou  $AD$

Podle *věty uu* jsou tedy trojúhelníky  $AMC$  a  $DMB$  podobné.

2. Nechť  $E$  je vnitřní bod strany  $AB$  trojúhelníku  $ABC$ . Označme  $D$  ( $D \neq C$ ) průsečík přímky  $CE$  s kružnicí opsanou trojúhelníku  $ABC$ . Dále označme  $F$  průsečík strany  $AC$  s přímkou, která prochází bodem  $E$  a je rovnoběžná s  $BC$ . Dokažte, že trojúhelníky  $ABD$  a  $ECF$  jsou podobné.

ŘEŠENÍ.



Označme  $\alpha = |\angle DAB|$ ,  $\beta = |\angle DBA|$ .

Pak  $|\angle ACD| = |\angle FCE| = \beta$ , neboť úhly  $ACD$  a  $DBA$  jsou obvodové úhly nad tětivou  $AD$ .

Dále platí, že  $|\angle DCB| = \alpha$ , neboť úhly  $DCB$  a  $DAB$  jsou obvodové úhly nad tětivou  $DB$ .

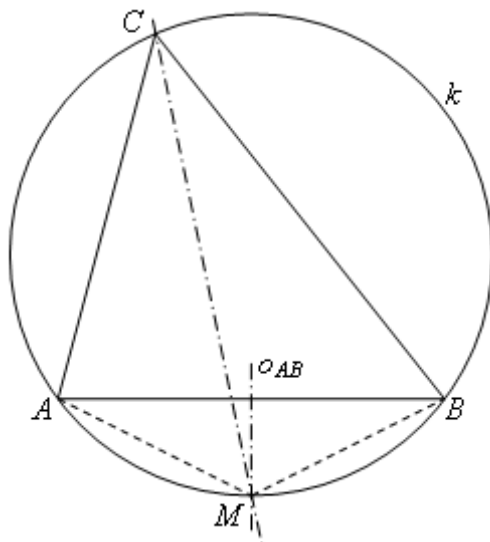
Nyní budeme chtít dokázat, že  $|\angle ADB| = |\angle EFC|$ .

Z trojúhelníku  $ADB$  platí, že  $|\angle ADB| = 180^\circ - \alpha - \beta$ .

Víme také, že z rovnoběžnosti  $BC$  a  $EF$  vyplývá, že  $|\angle AFE| = |\angle ACB| = \alpha + \beta$ . Úhly  $AFE$  a  $EFC$  jsou vedlejší, proto  $|\angle EFC| = 180^\circ - \alpha - \beta$  a tedy podle *věty uu* jsou trojúhelníky  $ABD$  a  $ECF$  podobné.

3. Nechť  $ABC$  je trojúhelník, v němž  $|AC| \neq |BC|$ . Dokažte, že osa úhlu  $BCA$  se s osou strany  $AB$  protíná v bodě, který leží na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .

ŘEŠENÍ.



Bod  $M$  leží na průsečíku  $o_{AB}$  a kružnice  $k$  opsané trojúhelníku  $ABC$ . Trojúhelník  $AMB$  je rovnoramenný se základnou  $AB$ , jeho vnitřní úhly při vrcholech  $A$  a  $B$  jsou tedy shodné.

Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné i úhly  $BCM$  a  $BAM$  (obvodové úhly nad tětivou  $BM$ ), resp.  $ACM$  a  $ABM$  (obvodové úhly nad tětivou  $AM$ ). Proto jsou shodné i úhly  $BCM$  a  $ACM$ .

Polopřímka  $CM$  je tudíž osou úhlu  $ACB$ :

$$|\angle ACM| = |\angle BCM| = \frac{\gamma}{2}$$

### Soutěžní úloha 6

Reálná čísla  $a, b$  mají tuto vlastnost: rovnice  $x^2 - ax + b - 1 = 0$  má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice  $x^2 - ax + b + 1 = 0$ .

- Dokažte nerovnost  $b > 3$ .
- Pomocí  $b$  vyjádřete kořeny obou rovnic.

### TEORIE

Každá kvadratická rovnice se dá vyjádřit ve tvaru:  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , kde  $a, b, c$  jsou číselné koeficienty, přičemž koeficient  $a$  musí být nenulový, v opačném případě by se jednalo o lineární rovnici.

Pro výpočet kořenů  $x_1$  a  $x_2$  je vhodné nejprve zjistit hodnotu diskriminantu  $D = b^2 - 4ac$ . Podle hodnoty diskriminantu  $D$  můžeme dostat obecně tři možnosti řešení:

1.  $D > 0$  Kvadratická rovnice má dva rozdílné reálné kořeny.
2.  $D = 0$  Kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen.
3.  $D < 0$  Kvadratická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel  $\mathbb{R}$ . Má ale řešení v oboru komplexních čísel.

Kořeny kvadratické rovnice pak vypočteme ze známého vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Každý polynom  $ax^2 + bx + c$  můžeme také převést na součinný tvar  $a(x - x_1)(x - x_2)$ , kde  $x_1$  a  $x_2$  jsou kořeny kvadratické rovnice.

Rovnici  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$  pak nazýváme rovnicí v součinném tvaru.

Vypočítat kořeny kvadratické rovnice můžeme také pomocí Vietových vzorců.

Tato metoda není tak univerzální jako metoda výpočtu pomocí diskriminantu.

Nejprve je potřeba upravit rovnici na normovaný tvar  $x^2 + px + q = 0$  a dále hledáme takové kořeny  $x_1$  a  $x_2$ , které vyhovují rovnicím:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

## NÁVODNÉ ÚLOHY

1. Najděte všechny dvojice čísel  $a, b$ , pro něž má každá z rovnic  $x^2 + ax + b = 0$ ,  $x^2 + bx + a = 0$  v množině reálných čísel dva různé kořeny, přičemž každý kořen druhé rovnice je o 1 větší než některý z kořenů první rovnice.

ŘEŠENÍ.

Pro kořeny  $x_1, x_2$  první rovnice (z Vietových vzorců) platí

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a \\ x_1 \cdot x_2 &= b \end{aligned} \quad .$$

Pro kořeny druhé rovnice  $x'_1 = x_1 + 1$ ,  $x'_2 = x_2 + 1$  analogicky platí

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 &= -b \\ x'_1 \cdot x'_2 &= a \end{aligned} \quad , \text{ tedy } \begin{aligned} x_1 + 1 + x_2 + 1 &= -b \\ (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) &= a \end{aligned} \quad .$$

Řešíme tedy soustavu 4 rovnic o 4 proměnných

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -a \\x_1 \cdot x_2 &= b \\x_1 + x_2 &= -b - 2 \\x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 &= a - 1\end{aligned}$$

Po odečtení první rovnice od třetí a dosazení z první a druhé rovnice do čtvrté rovnice obdržíme po úpravě soustavu dvou lineárních rovnic o dvou proměnných  $a, b$ .

$$\begin{aligned}a - b &= 2 \\2a - b &= 1\end{aligned}$$

Takže řešením je dvojice  $a = -1, b = -3$ .

JINÉ ŘEŠENÍ.

Použijeme-li k řešení úlohy vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, můžeme kořeny obou rovnic vyjádřit

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad x'_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2},$$

kde opět  $x'_1 = x_1 + 1, x'_2 = x_2 + 1$ , což po dosazení vede k řešení následující soustavy:

$$\begin{array}{rcl}\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} &= & \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} + 1 \\ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} &= & \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} + 1 \\ \hline -b - \sqrt{b^2 - 4a} &= & -a - \sqrt{a^2 - 4b} + 2 \\ -b + \sqrt{b^2 - 4a} &= & -a + \sqrt{a^2 - 4b} + 2 \\ \hline & & -2b = -2a + 4 \\ & & b = a - 2\end{array} \quad / (1) + (2)$$

Dosadíme-li nyní za  $b$  do některé z původních rovnic, obdržíme opět řešení  $a = -1, b = -3$ .

2. Najděte všechny dvojice reálných čísel  $a, b$ , pro něž mají každé dvě z rovnic  $x^2 - 10x + a = 0, x^2 - 16x + b = 0, x^2 - 18x + a + b = 0$  aspoň jeden společný kořen.

ŘEŠENÍ.

Mají-li mít každé dvě z rovnic aspoň jeden společný kořen, pak mají buď

- (a) všechny rovnice aspoň jeden kořen společný nebo

(b) každá dvojice rovnic má aspoň jeden společný kořen.

Tyto dva případy budeme řešit odděleně:

(a)

Kořeny rovnic si můžeme označit:

$x_1, x_2 \dots$  kořeny 1.rovnice,  $x_1, x_2' \dots$  kořeny 2.rovnice,  $x_1, x_2'' \dots$  kořeny 3.rovnice.

Pak z Vietových vzorců pro jednotlivé rovnice platí:

$$\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 = 10 & x_1 + x_2' = 16 & x_1 + x_2'' = 18 \\ x_1 \cdot x_2 = a & x_1 \cdot x_2' = b & x_1 \cdot x_2'' = a + b \end{array}$$

Vyjádříme-li postupně z první rovnice z každé dvojice rovnic  $x_2, x_2', x_2''$  a dosadíme do druhé rovnice, obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{l} x_1 \cdot (10 - x_1) = a \\ x_1 \cdot (16 - x_1) = b \\ x_1 \cdot (18 - x_1) = a + b \end{array}$$

Jestliže nyní sečteme první dvě rovnice a výsledek odečteme od třetí rovnice, obdržíme rovnici

$$x_1^2 - 8x_1 = 0,$$

jejíž řešení  $x_1 = 0$  a  $x_1 = 8$  dosadíme do prvních dvou rovnic a nalezneme řešení pro  $a, b$ :  $[0, 0], [16, 64]$ .

(b)

Kořeny rovnic si můžeme označit:

$x_1, x_2 \dots$  kořeny 1.rovnice,  $x_1, x_2' \dots$  kořeny 2.rovnice,  $x_2, x_2'' \dots$  kořeny 3.rovnice.

Podobným způsobem jako v případě I. dojdeme k řešení pro  $a, b$ :  $[24, 48]$ .

3. Najděte všechny dvojice čísel  $a, b$ , pro něž má každá z rovnic  $x^2 - 15x + a = 0$ ,  $x^2 - 15x + b = 0$  v množině reálných čísel dva různé kořeny, přičemž kladný rozdíl kořenů každé rovnice je kořenem zbývajících rovnic.

ŘEŠENÍ.

Označíme-li  $x_1, x_2$  kořeny první rovnice a  $x_1', x_2'$  kořeny druhé rovnice, můžeme tyto vyjádřit pomocí známých vzorců:

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4a}}{2}, x_{1',2'} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4b}}{2}$$

Kladný rozdíl kořenů každé rovnice je kořenem zbývajících rovnic. To znamená, že může nastat jedna ze čtyř možností

$$\begin{array}{llll} \text{I. } x_2 - x_1 = x_1' & \text{II. } x_2 - x_1 = x_2' & \text{III. } x_2 - x_1 = x_1' & \text{IV. } x_2 - x_1 = x_2' \\ x_2' - x_1' = x_1 & x_2' - x_1' = x_1 & x_2' - x_1' = x_2 & x_2' - x_1' = x_2 \end{array} .$$

Tyto případy budeme řešit odděleně. Ukážeme např. řešení pro II.

$$\begin{array}{r} \sqrt{225 - 4a} = \frac{15 - \sqrt{225 - 4b}}{2} \quad / \cdot 2 \\ \sqrt{225 - 4b} = \frac{15 + \sqrt{225 - 4a}}{2} \quad / \cdot 4 \\ \hline 2 \cdot \sqrt{225 - 4a} = 15 - \sqrt{225 - 4b} \\ -2 \cdot \sqrt{225 - 4a} = 30 - 4 \cdot \sqrt{225 - 4b} \quad / (1) + (2) \\ \hline 5 \cdot \sqrt{225 - 4b} = 45 \\ \sqrt{225 - 4b} = 9 \\ 225 - 4b = 81 \\ 4b = 144 \\ b = 36 \\ \vdots \\ a = 54 \end{array}$$

Podobně bychom vyřešili i možnosti I., III., IV, čímž dostaneme všechna řešení

$$[0, 0], [54, 36], [36, 54], [50, 50] .$$

Poznámka: Tato úloha se stejně jako předchozí dala vyřešit také pomocí Vietových vzorců.

## Návody k úlohám domácí části I. kola 59.ročníku MO kategorie C

V této kapitole se budeme věnovat problémovým úlohám a úlohám k procvičení, které jsou vhodným výchozím studijním materiálem pro úspěšné zvládnutí domácí části prvního kola matematické olympiády kategorie C určené pro první ročníky čtyřletých studijních oborů a jim odpovídající ročníky víceletých gymnázií.

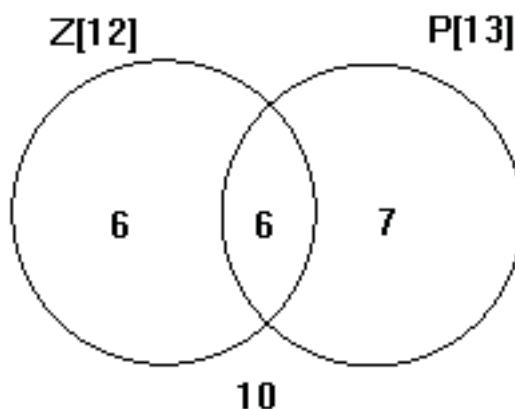
### Slovní logik — C–I–1

Než si uvedem pravidla hry "slovní logik" a motivační úlohy k tomuto příkladu, vyřešme následující tři úlohy.

1. Z 29 dětí sbírá 12 dětí známky, 13 pohlednice. Těch, kteří sbírají známky i pohlednice je šest. Kolik dětí sbírá jenom známky a kolik jich nesbírá nic?

Řešení:

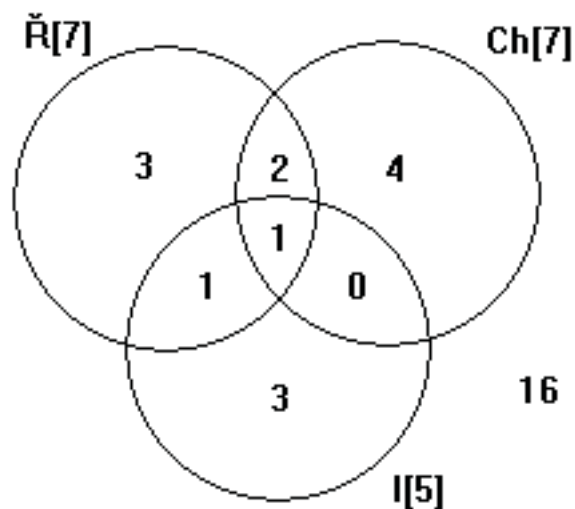
Jenom známky sbíralo 6 dětí, 10 dětí nesbíralo nic, viz. diagram níže.



2. Ze 30 žáků jedné třídy bylo 7 žáků o prázdninách na rekreaci v Řecku a právě tolik v Chorvatsku; Itálii navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto tří zemí nebylo 16 žáků, všechny tři navštívil jeden žák. V Řecku i Itálii byli 2 žáci, v Itálii i v Chorvatsku 1 žák. Kolik žáků navštívilo o prázdninách Chorvatsko nebo Řecko, Itálii nebo Chorvatsko, jen Řecko?

Řešení:

Načrtneme Vennův diagram pro tři množiny a postupně vyznačíme počty prvků v jednotlivých jeho částech.

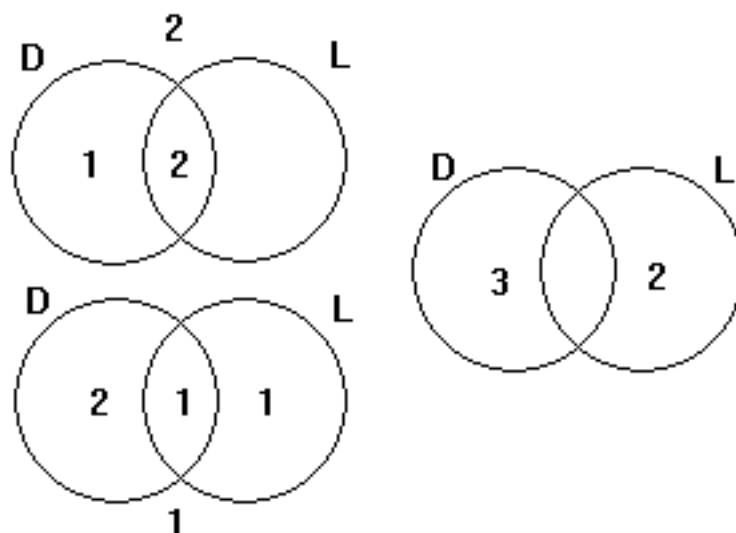


Chorvatsko nebo Řecko navštívilo 11 studentů, Itálii nebo Chorvatsko 1 student, jen v Řecku byli 3 studenti.

3. Z pěti rodin odebírají tři rodiny deník Dnes a dvě Lidové noviny. Existuje mezi nimi rodina, která neodebírá žádný z těchto materiálů?

Řešení:

Ano, může. Možnosti při odebírání novin vidíme na následujících diagramech.



Uveďme si pravidla hry "slovní logik". Hráč *A* si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč *B* vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a

hráč  $A$  mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou.

Například: Myslíme si slovo SEŠIT, hráč  $B$  řekne slovo ŠIŠKA, hráč  $A$  zkráceně odpoví  $1 + 1$ , neboť jedno písmeno je na správné pozici (Š) a jedno písmeno je na nesprávné pozici (I). Nebo jiná dvojice: LOĎKA + KOLÁČ  $\rightarrow 1 + 2$ .

4. Erika a Klárka hrály hru "slovní logik". Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova SIRUP a VODKA. Erika v daném pořadí odpověděla  $0 + 3$  a  $1 + 1$ . Dokažte, že všechna písmena slova, které si Erika myslela, patří do množiny  $M = \{S, I, R, U, P\} \cup \{V, O, D, K, A\}$ .

Řešení:

Slova SIRUP a VODKA nemají žádné společné písmeno. Erika si mohla myslet například slovo DOPIS, RUSKO, IRSKO nebo PRVKU.

5. Erika a Klárka hrály hru slovní logik". Erika si myslela slovo AGÁTY a Klárka vyslovila slova KABÁT a MĚSTA. Ověřte, že Erika musela odpovědět stejně jako v úloze 4. Proč nyní nepatří všechna písmena slova, která si Erika myslela, do množiny  $L = \{K, A, B, Á, T\} \cup \{M, Ě, S, T, A\}$ ?

Řešení:

Slova mají společné písmeno "A". Proto se v množině sestavené z písmen obou slov nenachází všech pět písmen hledaného slova.

6. Erika a Klárka hrály hru "slovní logik". Klárka vyslovila slova OPAVÚ a ÚLOZE, přičemž Erika odpověděla stejně jako v úloze 4. Jaké slovo si Erika myslela, když všechna jeho písmena už patří do množiny  $L = \{O, P, A, V, Ú\} \cup \{Ú, L, O, Z, E\}$ ?

Řešení:

Vybíráme 3 písmena v jiné pozici z prvního slova, jedno písmeno v nesprávné pozici a jedno ve správné pozici z druhého slova. Erika si myslela slovo PAVLE.

7. Třicet maturantů jednoho gymnázia podalo přihlášku k dalšímu studiu na některou ze šesti fakult ČVUT. Využili možnost podat více přihlášek, a tak polovina žáků podala přihlášku aspoň na tři fakulty, třetina si podala přihlášku na více než tři fakulty. Na fakultu architektury se s ohledem na talentovou přijímací zkoušku nehlásil nikdo.

a) Dokažte, že aspoň na jednu fakultu si podalo přihlášku aspoň 14 studentů.

b) Dokažte, že na některou ze zbývajících pěti fakult se přihlásilo méně než dvacet studentů.

Řešení:

a) V případě, že by neplatilo toto tvrzení, mohlo by být nejvýše  $5 \cdot 13 = 65$  přihlášek. Dle zadání polovina studentů podala aspoň tři přihlášky, tedy druhá polovina studentů podala jednu nebo dvě přihlášky. Z druhé poloviny 10 studentů (třetina z celkového počtu) podalo aspoň čtyři přihlášky a zbývajících 5 studentů podalo právě tři přihlášky. Minimální počet přihlášek dle podmínek zadání je  $15 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 70 > 65$ . Tedy aspoň na jednu fakultu podala přihlášku aspoň čtrnáct studentů. Rozpis pro případ, kdy na každou fakultu si podala přihlášku právě 14 studentů viz. tabulka níže.

| student | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1       | x  | x  | x  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2       |    |    |    | x  | x  | x  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3       |    |    |    |    |    |    | x  | x  | x  |    |    |    |    |    |    |
| 4       |    |    |    |    |    |    |    |    |    | x  | x  | x  |    |    |    |
| 5       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    | x  | x  | x  |
|         | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|         | x  | x  | x  |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |    |    |
|         |    | x  | x  | x  |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  |    |    | x  | x  |
|         |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |    |    | x  | x  | x  | x  |
|         | x  |    |    | x  | x  | x  | x  |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  |
|         | x  | x  |    |    | x  |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |

b) Kdyby tvrzení úlohy neplatilo, bylo by zapotřebí aspoň  $5 \cdot 20 = 100$  přihlášek. Z rozboru řešení v případě a) odhadneme, že maturanti podali nejvýše  $15 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 95 < 100$ , proto nemohli podat na každou fakultu aspoň 20 přihlášek. Rozpis pro případ, kdy na každou fakultu studenti podali právě 19 přihlášek viz níže.

| student | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1       | x  | x  | x  | x  | x  | x  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2       |    |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  |    |    |    |    |    |    |
| 3       |    |    |    |    |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  |    |    |    |
| 4       |    |    |    |    |    |    |    |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  |
| 5       | x  | x  | x  |    |    |    |    |    |    |    |    |    | x  | x  | x  |
|         | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|         | x  | x  | x  |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |
|         |    | x  | x  | x  |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |
|         |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |
|         | x  |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |
|         | x  | x  |    |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  |

8. Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz?

Řešení:

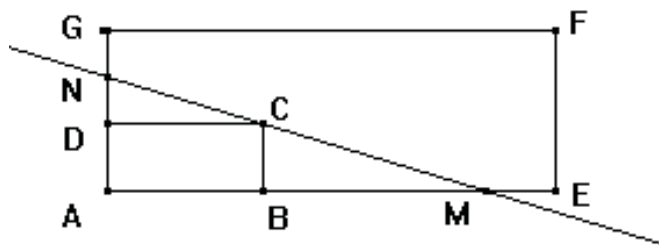
Dohromady chlapci dostali od kolemjdoucích celkem 42 Kč. Číslo 42 vyjádříme jednoznačně jako součet čtyř po sobě jdoucích čísel  $9+10+11+12 = 42$ . Úvahy lze uspořádat do tabulky, přičemž uvážíme, že nemohl ani jeden z chlapců dostat dvakrát 8 Kč. K tomu nejvýše jeden mohl dostat 4 Kč, jinak by byli dva s nejvyšší vybranou částkou 12 Kč, viz tabulka níže.

| 1       | 2            | 3            | 4            | 5            | $\Sigma$             |   |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------------|---|
|         | 8            |              | 0            | 0            |                      |   |
|         | 0            |              | 0            | 8            |                      |   |
| 0       | 0            | 0            | 4            | 8            | $12 \rightarrow$     | P |
| 3       | 0            | 2            | 4            | 0            | $\leq 9 \rightarrow$ | H |
| $1+2+3$ | $1 \times 8$ | $2 \times 2$ | $2 \times 4$ | $2 \times 8$ |                      |   |

Nejméně vybral Honza a nejvíce vybral Petr.

## Přímky a pravoúhelník — C–I–2

1. Na list papíru tvaru obdélníku narýsujte podle obrázku pravoúhelník  $ABCD$  tak, aby jeho strany  $AB$  a  $AD$  splývaly s okrajem papíru. Pak sestrojte přímku, aby měla s pravoúhelníkem společný jen bod  $C$  a její průnik listem papíru tvořil úsečku  $MN$ , podél níž papír rozřízněte.

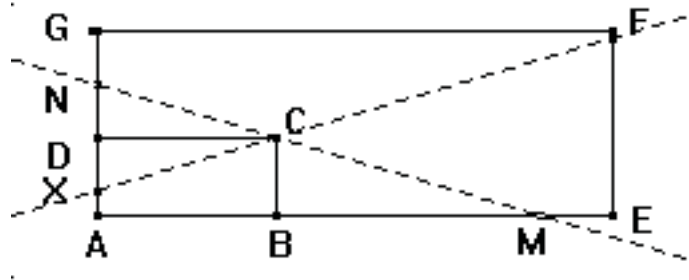


Vzniklý papírový model trojúhelníku  $AMN$  s narýsovaným obdélníkem  $ABCD$  přehněte podél úseček  $BC$  a  $DC$ . Tuto činnost několikrát opakujte,

přitom pro tentýž pravoúhelník  $ABCD$  volte různé délky úsečky  $BM$ . Co lze z výsledku usoudit o poměru obsahů trojúhelníku  $AMN$  a pravoúhelníku  $ABCD$ ? Hypotézu dokažte.

Řešení:

Tímto modelováním nebo užitím programů dynamické geometrie, např. Cabri, je možné dojít k hypotéze, že obrazem přímky  $MN$  v obou souměrnostech je jedna a táž přímka  $CX$ .



Uvážíme-li souhlasné úhly při vrcholech  $M$  a  $C$  v trojúhelnících  $NDC$  a  $NAM$ , pak můžeme psát

$$|\sphericalangle NCD| = |\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle DCX| = \alpha$$

a

$$|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle BCX| = 90^\circ - \alpha.$$

Součet úhlů s vrcholem v bodě  $C$  je pak roven

$$\begin{aligned} |\sphericalangle NCD| + |\sphericalangle DCX| + |\sphericalangle MCB| + |\sphericalangle BCX| &= \\ &= \alpha + \alpha + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ, \end{aligned}$$

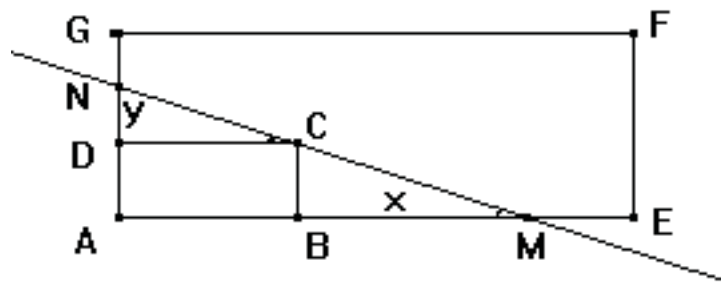
tedy obrazy přímky  $MN$  v osových souměrnostech podle přímek  $BC$  a  $CD$  splývají.

Z podobnosti trojúhelníků  $NDC$  a  $CBM$  plyne, že  $\frac{y}{b} = \frac{a}{x} \Rightarrow y = \frac{ab}{x}$ .

Pak obsah  $\triangle AMN$  můžeme vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(a+x) \left( b + \frac{ab}{x} \right) = \\ &= ab + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \right) \geq 2ab. \end{aligned}$$

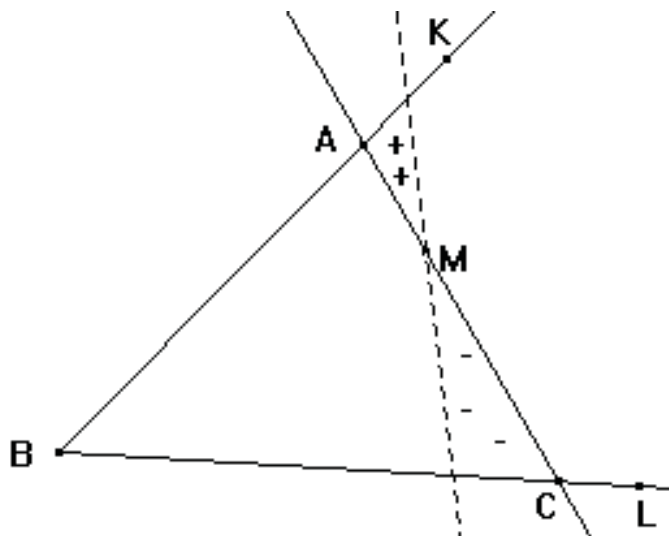
Rovnost nastane, právě když  $x = a$ . V tomto případě je  $S_{AMN} = 2ab$ .



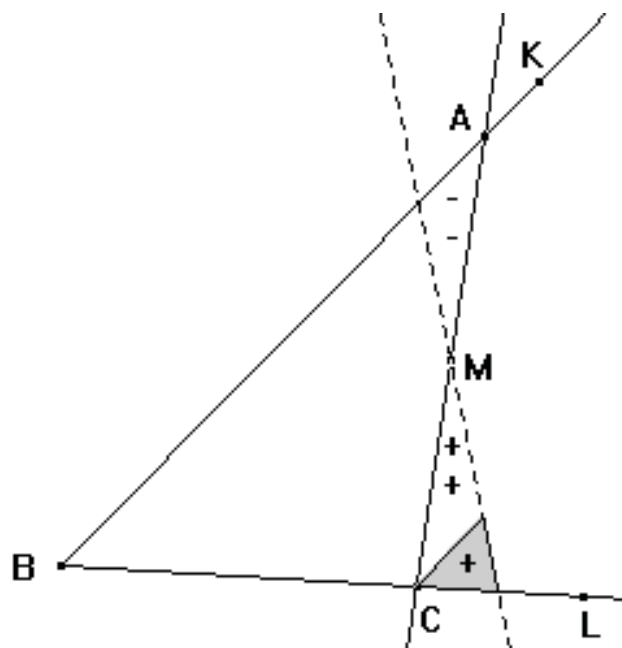
2. Je dán ostrý úhel  $KBL$  a bod  $M$  jeho vnitřku. Sestrojte bodem  $M$  přímku  $p$  tak, aby vytínala z úhlu  $KBL$  trojúhelník  $ABC$  nejmenšího obsahu.

Řešení:

Analýzujte obsah trojúhelníku  $ABC$  pro různé případy polohy bodu  $M$  vzhledem k úsečce  $AC$ . Na obrázku je bod  $M$ , jím proložená přímka a trojúhelník  $ABC$ . Uvažme jinou přímku procházející bodem  $M$ . Z obrázku je patrné, že nově vzniklý trojúhelník má menší obsah než původní trojúhelník.



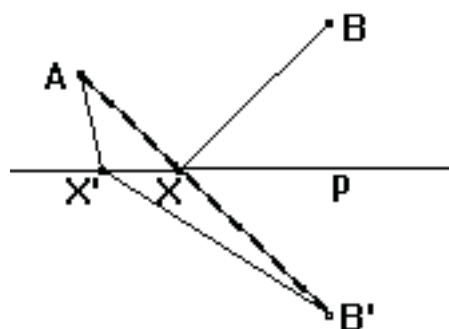
Uvažíme-li polohu bodu  $M$  takovou, že je středem úsečky  $AC$ , pak z obrázku níže je patrné, že libovolnou jinou přímkou vedenou bodem  $M$  nedosáhneme trojúhelníku s menším obsahem, než má trojúhelník  $ABC$ .



3. Je dána přímka  $p$  a v jedné polorovině body  $A, B$ . Najděte na přímce  $p$  bod  $X$  tak, aby součet vzdáleností od bodů  $A, B$  byl co nejmenší.

Řešení:

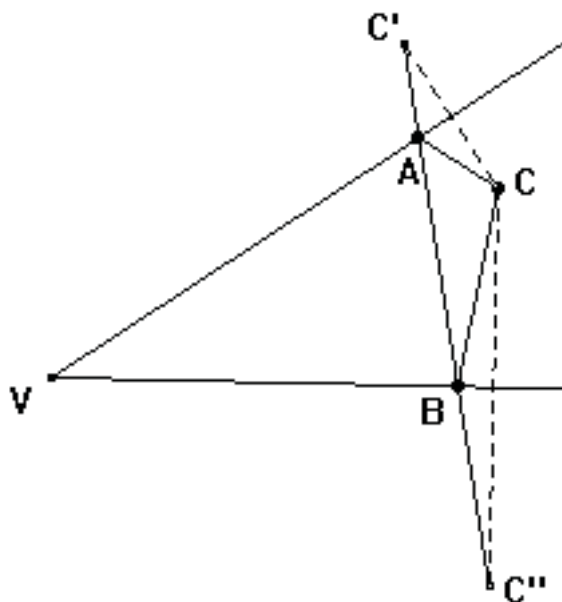
Hledaný bod  $X$  získáme jako průsečík úsečky  $AB'$  s přímkou  $p$ , kde bod  $B'$  je obrazem bodu  $B$  v osové souměrnosti dané osou  $p$ . A dále platí, že  $|XB| = |XB'|$ , tedy  $|AX| + |XB| = |AX| + |XB'|$ . Pro jinou polohu bodu  $X$ , např.  $X'$ , platí v  $\triangle AX'B'$  trojúhelníková nerovnost, tj.  $|AX'| + |X'B'| > |AB'|$ . Pro bod  $X$  zkonstruovaný tímto způsobem je součet minimální.



4. Je dán ostrý úhel  $XVY$  a jeho vnitřní bod  $C$ . Sestrojte na rameni  $VX$  bod  $A$  a na rameni  $VY$  bod  $B$  tak, aby vzniklý trojúhelník měl  $ABC$  měl minimální obvod.

Řešení:

Analogicky předchozímu příkladu, zobrazíme bod  $C$  v osových souměrnostech podle ramen daného úhlu, viz. obrázek. Hledané zbylé vrcholy jsou pak průsečíkem ramen úhlu s úsečkou  $C'C''$ .



5. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla  $a, b$  platí

$$\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab},$$

přičemž rovnost nastane, právě když  $a = b$ .

Řešení:

Uvažme  $a = u^2, b = v^2, u, v \geq 0$ . Pak po substituci dostaneme  $\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \geq \sqrt{u^2 v^2} = uv$  pro nezáporná čísla. Po úpravě  $u^2 + v^2 \geq 2uv$ , odkud  $(u - v)^2 \geq 0$ , což je výrok pravdivý. Druhá mocnina libovolného reálného čísla je vždy nezáporná.

### Celá část $x$ — C–I–3

1. Určete  $[0]$ ,  $[2, 1]$ ,  $[2, 8]$ ,  $[99, 9]$ ,  $[5]$ ,  $[-10]$ ,  $[-2, 001]$ ,  $[-2, 8]$ ,  $[-99, 9]$ ,  $[-9]$ .

Řešení:

0; 2; 2; 99; 5; -10; -3; -3; -100; -9.

2. Necht'  $a \in \mathbb{Z}$  a  $t \in \langle 0; 1 \rangle$ . Určete  $\lfloor a \rfloor, \lfloor a + t \rfloor, \lfloor a + \frac{1}{2}t \rfloor, \lfloor a - t \rfloor, \lfloor a + 2t \rfloor, \lfloor a - 2t \rfloor$ .

Řešení:

$a; a; a; a$  pro  $t = 0$  a  $a - 1$  pro  $t \in (0; 1)$ ;  $a$  pro  $t \in \langle 0; \frac{1}{2} \rangle$  a  $a + 1$  pro  $t \in \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$ ;  $a$  pro  $t = 0$ ,  $a - 1$  pro  $t \in (0; \frac{1}{2})$  a  $a - 2$  pro  $t \in (\frac{1}{2}; 1)$ .

3. Načrtněte grafy funkcí:  $y = \lfloor x \rfloor, y = x - \lfloor x \rfloor$ .

4. Řešte v  $\mathbb{R}$ :

a)  $x + \lfloor x \rfloor = 68,5$

b)  $x + \lfloor x \rfloor = 97$

c)  $x \cdot \lfloor x \rfloor = 68,5$

d)  $x \cdot \lfloor x \rfloor = 97$

Řešení:

a) 34,5; b) nemá řešení; c)  $8 < x < 9, x = 8,5625$ ; d) nemá řešení.

5. Řešte rovnice  $x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\lfloor 3x - 5 \rfloor = 5x - 8$

b)  $\lfloor \frac{5+6x}{8} \rfloor = \frac{15x-7}{5}$

c)  $\lfloor \frac{3+2x}{4} \rfloor = \lfloor \frac{5-3x}{2} \rfloor$

d) soustavu  $x, y \in \mathbb{R}$ :  $7 \lfloor x \rfloor + 2y = 117,4$  a  $5x + 2 \lfloor y \rfloor = 91,9$

Řešení:

a) Výraz  $5x - 8$  je nutně celé číslo, tedy  $k = 5x - 8$ , odkud  $x = \frac{1}{5}(k + 8)$ . Podstitíme do zadání dostaneme

$$\left\lfloor 3 \frac{k+8}{5} - 5 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k-1}{5} \right\rfloor = k.$$

To podle definice celé části vede k nerovnostem

$$k \leq \frac{3k-1}{5} < k+1 \Rightarrow -3 < k \leq \frac{1}{2},$$

odkud pro  $k = -2$  je  $x_1 = 1,2$ , nebo  $k = -1$  je  $x_2 = 1,4$ .

b) Výraz  $\frac{15x-7}{5} = k \in \mathbb{Z}$  a tedy  $\frac{15x-7}{5} \leq \frac{5+6x}{8} < \frac{15x-7}{5} + 1$ .

Z první nerovnice plyne  $x \leq \frac{9}{10} = \frac{81}{90}$ , z druhé nerovnice plyne  $x > \frac{41}{90}$ .

Dále víme, že  $\frac{15x-7}{5} = k \Rightarrow x = \frac{30k+42}{90}$ , tedy  $40 < 30k + 42 \leq 81$  a konečně  $-\frac{1}{30} < k \leq \frac{39}{90}, k = 0; 1$ . Po dosazení máme  $x_1 = \frac{7}{15}, x_2 = \frac{4}{5}$ .

c)

Platí současně  $k \leq \frac{3+2x}{4} < k+1$  a  $k \leq \frac{5-3x}{2} < k+1$ . Pak  $I_{k_1} = \langle \frac{4k-3}{2}; \frac{4k+1}{2} \rangle$  a  $I_{k_2} = \langle \frac{3-2k}{3}; \frac{5-2k}{3} \rangle$  a hledáme, pro která celá čísla  $k$  mají tyto intervaly neprázdný průnik. Tedy  $\frac{4k+1}{2} > \frac{3-2k}{3}$  a současně  $\frac{5-2k}{3} \leq \frac{4k-3}{2}$ , odkud dostaneme pro  $k$  podmínku, že  $\frac{3}{16} < k \leq \frac{19}{16} \Rightarrow k = 1$ .

Pro  $k = 1$  a po dosazení  $\lfloor \frac{3+2x}{4} \rfloor = \lfloor \frac{5-3x}{2} \rfloor = 1$ , je výsledný interval  $x \in \langle \frac{1}{2}; \frac{5}{2} \rangle \cap (\frac{1}{2}; 1) = \langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$ .

d)

Označme  $x - \lfloor x \rfloor = x_0$  a  $y - \lfloor y \rfloor = y_0$ , kde  $x_0, y_0 \in \langle 0; 1 \rangle$ . Pak daná soustava přejde na tvar

$$\begin{aligned} 7 \lfloor x \rfloor + 2 \lfloor y \rfloor &= 117,4 - 2y_0 \\ 5 \lfloor x \rfloor + 2 \lfloor y \rfloor &= 91,9 - 5x_0. \end{aligned}$$

Na levé straně obou rovnic soustavy je součet celých čísel, tedy i na pravé straně rovnic soustavy musí být celá čísla, odkud pro  $y_0$  plynou dvě možnosti:  $y_0 = 0,2$  nebo  $0,7$ .

Z první rovnice vyjádříme  $\lfloor y \rfloor = \frac{117,4 - 2y_0 - 7 \lfloor x \rfloor}{2}$ , dále rovnice od sebe odečteme, dostaneme pro  $y_0 = 0,2$  rovnici  $2 \lfloor x \rfloor = 25,1 + 5x_0$  a  $\lfloor y \rfloor = \frac{117 - 7 \lfloor x \rfloor}{2}$ . Protože  $0 \leq 5x_0 < 5$ , je  $\lfloor x \rfloor = 13, 14$  nebo  $15$ . Z důvodu  $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ , musí být  $\lfloor x \rfloor$  liché. Pak dostaneme

| $\lfloor x \rfloor$ | $x_0$ | $\lfloor y \rfloor$ | $x$   | $y$  |
|---------------------|-------|---------------------|-------|------|
| 13                  | 0,18  | 13                  | 13,18 | 13,2 |
| 15                  | 0,98  | 6                   | 15,98 | 6,2  |

Analogicky pro druhý případ, kdy  $y_0 = 0,7$  a  $\lfloor y \rfloor = \frac{116 - 7 \lfloor x \rfloor}{2}$ , dostaneme po odečtení  $2 \lfloor x \rfloor = 24,1 + 5x_0$ . Protože  $0 \leq 5x_0 < 5$ , je  $\lfloor x \rfloor = 13$  nebo  $14$ . Z důvodu  $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ , musí být  $\lfloor x \rfloor$  sudé. Pak dostaneme

| $\lfloor x \rfloor$ | $x_0$ | $\lfloor y \rfloor$ | $x$   | $y$ |
|---------------------|-------|---------------------|-------|-----|
| 14                  | 0,78  | 9                   | 14,78 | 9,7 |

Máme tedy celkem tři řešení  $[13, 18; 13, 2], [15, 98; 6, 2], [14, 78; 9, 7]$ .

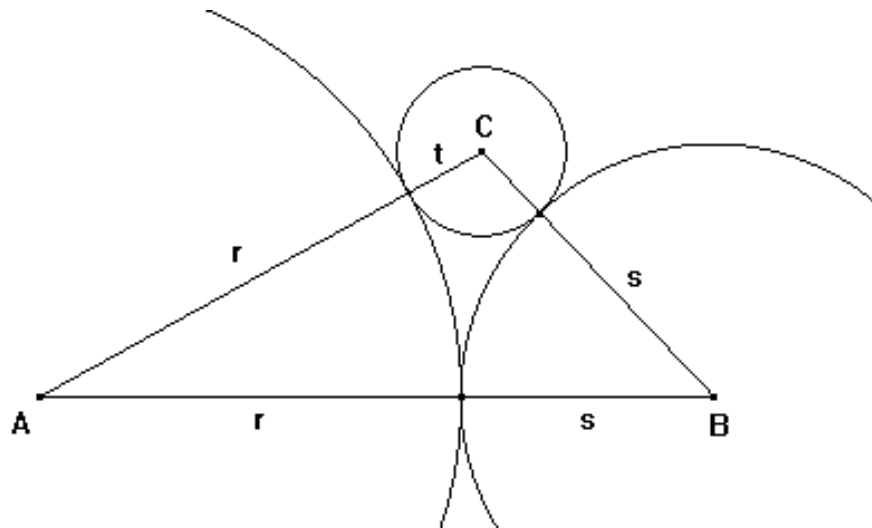
## Mocnost bodu ke kružnici — C–I–4

- Určete poloměry tří kružnic, jejichž středy tvoří vrcholy trojúhelníku se stranami délek  $a, b, c$ , a každé dvě mají vnější dotyk.

Řešení:

Z obrázku vidíme, že  $a = s + t$ ,  $b = r + t$ ,  $c = r + s$ . Odkud sečtením prvním dvou rovnic získáme rovnici  $a + b = r + s + 2t = c + 2t$ , z čehož plyne

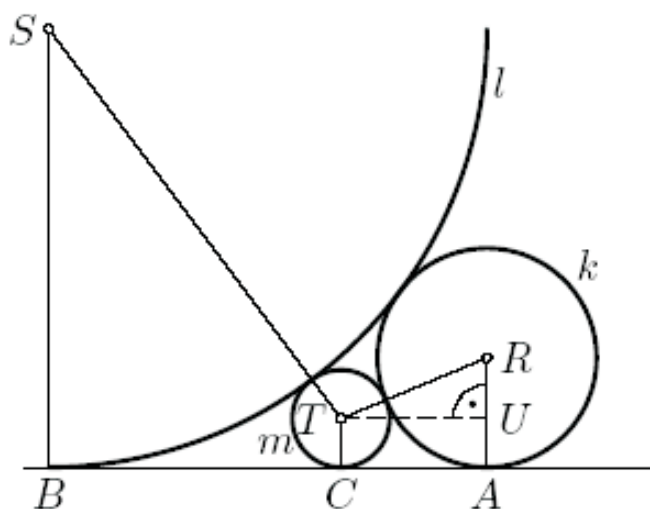
$t = \frac{a+b-c}{2}$ . Postupným dosazením získáme i velikosti zbývajících poloměrů  $s = \frac{a+c-b}{2}$  a  $r = \frac{b+c-a}{2}$ .



2. Kružnice  $k, l, m$  se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic  $k, l$  jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice  $m$ . Najděte všechna řešení.

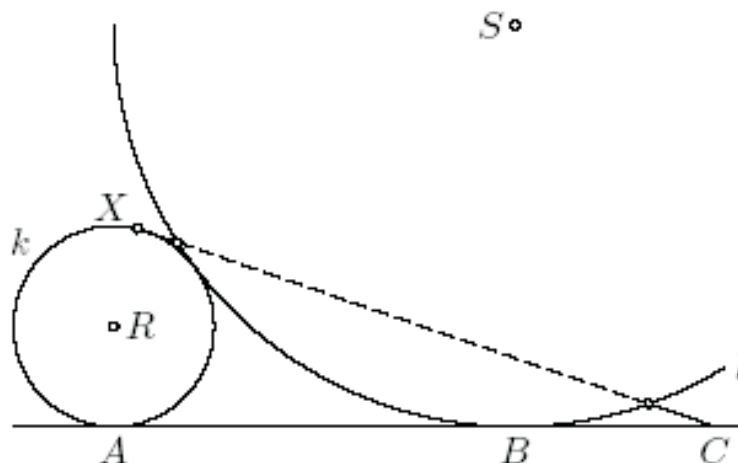
Řešení:

Označme poloměry kružnic  $k, l$  postupně  $r, s$  a body dotyku na společné tečně  $A, B, C$ . Viz obrázek.



Uvažujme lichoběžník  $ARTC$  a dále vezměme pravoúhlý trojúhelník  $RUT$ ,  $|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}$ . Analogicky z lichoběžníků  $CTSB$  a  $ARSB$  dostaneme vztahy  $|BC| = 2s\sqrt{rt} = 4\sqrt{3t}$  a

$|AB| = 2sqrtrs = 12$ . Nejdříve uvažme, že bod  $C$  leží mezi body  $A$  a  $B$ . Je pak  $2sqr3t + 4\sqrt{3}t = 12$ , odkud  $t = \frac{4}{3}$ . Jestliže bod  $A$  leží mezi body  $C$  a  $B$ , dostaneme rovnici  $2\sqrt{3}t + 12 = 4\sqrt{3}t$ , odkud  $t = 12$ . Jiný případ, bod  $B$  je mezi body  $A$  a  $C$ , nemá řešení, viz. další obrázek.



Poloměr  $m$  je roven  $\frac{4}{3}$  cm nebo 12 cm.

3. Kružnice  $k, l, m$  se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice  $k$  a  $l$  stejně jako kružnice  $l$  a  $m$  mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice  $l$ , jestliže poloměry kružnic  $k$  a  $m$  jsou 3 cm a 12 cm.

Řešení:

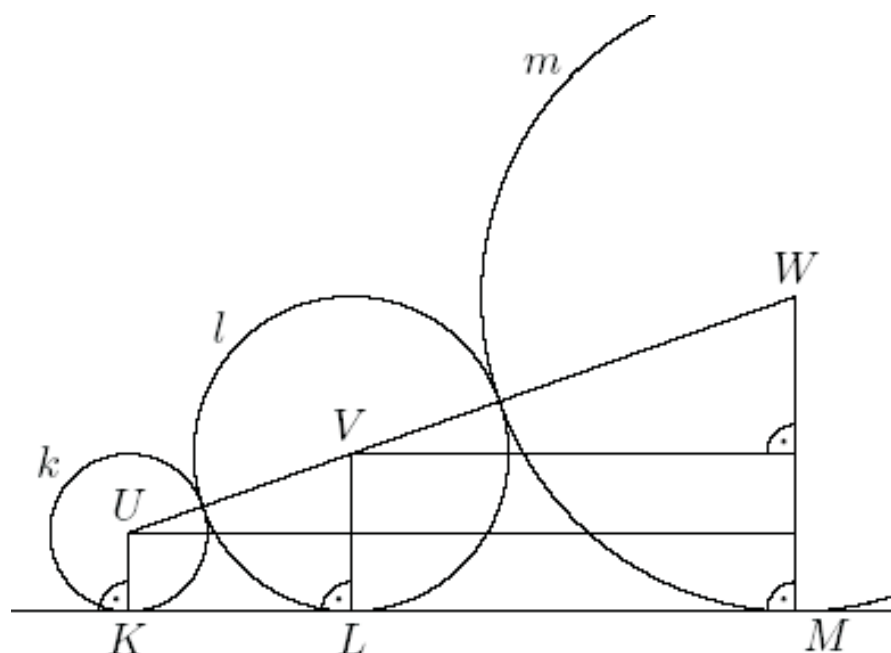
Z pravoúhlých lichoběžníků  $KLVU, LMWV, KMWU$  plyne podle Pythagorovy věty

$$\begin{aligned} |KL|^2 &= (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r \\ |LM|^2 &= (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r \\ |KM|^2 &= (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144 \end{aligned}$$

a  $|KL| + |LM| = |KM|$ . Po úpravě pro  $r$  rovnici

$$4r^2 - 48r + 144 = 0 = 4(r-6)^2.$$

Má tato rovnice jediné řešení  $r = 6$ .

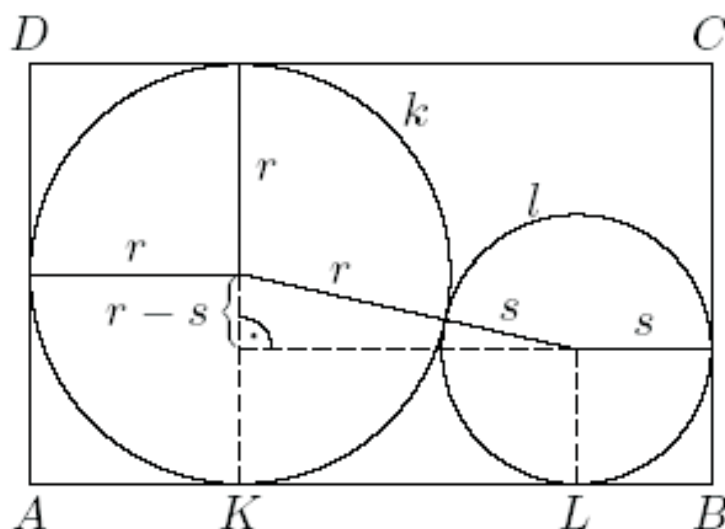


Kružnice  $l$  má poloměr 6 cm.

4. Kružnice  $k, l$  s vnějším dotykem leží obě v obdélníku  $ABCD$ , jehož obsah je  $72 \text{ cm}^2$ . Kružnice  $k$  se přitom dotýká stran  $CD, DA$  a  $AB$ , zatímco kružnice  $l$  se dotýká stran  $AB$  a  $BC$ . Určete poloměry kružnic  $k, l$ , jestliže poloměr kružnice  $k$  je v centimetrech vyjádřen celým číslem.

Řešení:

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs} \text{ a } S_{ABCD} = |AD| \cdot |AB| = 2r \cdot (r + 2\sqrt{rs} + s) = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2. \text{ Odkud } rs = (6-r)^2 \text{ a } s = \frac{(6-r)^2}{r}.$$



Z úlohy plyne, že  $s \not\leq r$ , tj.  $s \leq r$  a  $|AB| > 2r$ . Dále  $72 = |AB| \cdot |AD| \geq 4r^2 \Rightarrow r < 4$ . Pak  $\{r; s\} \in \{4, 1\}$ .

Úloha má právě dvě řešení:  $r = s = 3$  cm a  $r = 4$  cm,  $s = 1$  cm.

## Algebraické nerovnosti — C–I–5

1. Dokažte, že  $\forall a, b \in \mathbb{R} : ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ .

Řešení:

Po úpravě  $2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a^2 - 2ab + b^2) \Leftrightarrow 0 \leq (a - b)^2$ , což je výrok pravdivý, druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná.

2. Dokažte, že  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

Řešení:

Po úpravě  $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ .

3. Dokažte, že  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab = 1 \Rightarrow a + b \geq 2$ .

Řešení:

Po vyjádření  $a = \frac{1}{b}$  a dosazení máme nerovnici ve tvaru  $\frac{1}{b} + b \geq 2 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (b - 1)^2 \geq 0$ .

4. Dokažte, že  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : 3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2 \Rightarrow x = y = z$ .

5. Dokažte, že  $\forall a \in \mathbb{R}^+ : a + \frac{1}{a} \geq 2$ . Kdy nastane rovnost?

Řešení:

Viz. úloha 3 v této podkapitole. Rovnost nastane pro  $a = 1$ .

6. Dokažte, že  $\forall a \in \mathbb{R}^+ : a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$ . Kdy nastane rovnost?

Řešení:

Analogicky upravíme a dostaneme výraz  $a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2 \geq 0$ . Rovnost nastane pro  $a = 1$ .

7. Najděte všechny trojice kladných čísel  $a, b, c$ , pro které platí

$$a + 2b + 3c + \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 12.$$

Řešení:

Po úpravě  $a + \frac{1}{a} + 2\left(b + \frac{1}{b}\right) + 3\left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 12$ . Rovnost nastane pro  $a = b = c = 1$ .

8. Nechť  $a, b, c, d$  jsou taková reálná čísla, že  $a + d = b + c$ . Dokažte nerovnost

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geq 0.$$

Řešení:

Z podmínky nerovnice získáme vyjádření pro  $d$ ;  $d = b + c - a$  a toto dosadíme do levé strany nerovnice. Po úpravě  $2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2(a - b)^2$ . Výraz je nezáporný pro každé reálné číslo, tím je nerovnost dokázána.

9. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla  $a, b$  platí

$$\frac{a + b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Řešení:

Nejprve upravíme levou část, tedy  $3(a + b)^2 < 4(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow 0 < (a - b)^2$  pro  $a \neq b$ . Pravou část umocníme (obě strany nerovnice jsou kladná čísla), roznásobíme a částečně upravíme na tvar

$$6a^2b^2 < a^4 + b^4 + 2a^3b + 2ab^3.$$

Což můžeme chápat jako součet dvou nerovností

$$2a^2b^2 < a^4 + b^4 \Rightarrow 0 < (a - b)^2$$

a

$$4a^2b^2 < 2a^3b + 2ab^3 \Rightarrow 0 < 2ab(a - b)^2.$$

10. Určete všechna kladná čísla  $x, y, z$ , pro něž současně platí:

$$x + \frac{1}{y} \leq 2, \quad y + \frac{1}{z} \leq 2, \quad z + \frac{1}{x} \leq 2$$

Řešení:

Sečtením všech tří nerovnic dostaneme  $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 6$ . Provedeme odhad na základě úlohy 5, resp. 3. Tedy  $6 \leq x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} \leq 6$ . Tedy  $x = y = z = 1$ .

## Dělitelnost — C-I-6

1. Trojciferné číslo je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li tuto číslici na první místo, dostaneme číslo, které je o 81 menší než číslo původní. Určete původní číslo.

Řešení:

Hledané číslo je tvaru  $\overline{ab4}$ , po přesunu poslední číslice  $\overline{4ab}$ , kde  $a, b$  jsou číslice  $0 < a \leq 9$ ,  $0 \leq b \leq 9$ . Rozepíšeme-li jej do rozvinutého zápisu v desítkové soustavě, obdržíme rovnici

$$100a + 10b + 4 = 100 \cdot 4 + 10a + b + 81 \Rightarrow 10a + b = 53.$$

Uvažíme-li, že  $a, b$  jsou číslice  $0 < a \leq 9$ ,  $0 \leq b \leq 9$ , získáme jediné řešení  $a = 5, b = 3$ . Hledané číslo je 534.

2. Najděte všechna čtyřmístná čísla  $n$ , která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla  $n$  jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo  $n$  je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla  $n$ , je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi.

Řešení:

Uvažme tři případy:  $\overline{aabb}$ ,  $\overline{abab}$  a  $\overline{abba}$ , kde  $0 < a, b \leq 9$ .

a)  $n = \overline{aabb} = 1100a + 11b$  a  $n' = \overline{bbaa} = 1100b + 11a$ . Dále platí, že  $7|n$  a  $7|n'$ , musí dělit i jejich součet a rozdíl. Tedy  $7|(n - n')$  a též  $7|(n + n')$ . Po úpravě máme

$$n + n' = 1111(a + b), \quad n - n' = 1089(a - b).$$

Čísla 1089, 1111 však nejsou dělitelná 7, tedy 7 musí dělit  $a + b$  a  $a - b$ . Použijeme stejnou úvahu ještě jednou, tedy  $7|(a + b) + (a - b)$  a  $7|(a + b) - (a - b)$ , odkud vyplývá, že  $7|2a$  a  $7|b$ , neboli  $a, b \in \{0; 7\}$ . Číslice  $a, b$  jsou navzájem různé, proto jedna z nich musí být 0. Číslo  $n$  nebo  $n'$  by pak ale nebylo čtyřmístné. Číslo  $n$  nemůže být tohoto tvaru.

b)  $n = \overline{abab} = 1010a + 101b$  a  $n' = \overline{baba} = 1010b + 101a$ . Podobně jako v předcházejícím případě odvodíme, že

$$7|n - n' = 909(a - b), \quad 7|n + n' = 1111(a + b) \Rightarrow 7|a, b \Rightarrow a, b \in \{0; 7\},$$

tedy jedna z nich opět musí být 0. Číslo  $n$  nebo  $n'$  by pak ale nebylo čtyřmístné a nemůže být ani tohoto tvaru.

c)  $n = \overline{abba} = 1001a + 110b = n'$  a protože  $7|1001$  a  $7 \nmid 110$ , musí  $7|b \Rightarrow b \in \{0; 7\}$ . Vzhledem k podmínce  $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$  a  $a \neq b$  je řešením 17 čísel 1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, 1 771, 2 772, 3 773, 4 774, 5 775, 6 776, 8 778, 9 779.

3. Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako původní číslo, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat?

Řešení:

Hledáme číslo tvaru  $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$  a  $9x = 9(100a + 10b + c) = \overline{adde} = 1000a + 100d + 10d + (a + b + c)$ , přičemž  $a, b, c, d, e$  jsou číslice. Porovnáním posledních číslic zjistíme, že poslední číslice výrazu  $9c$  je táž, jako výraz  $a + b + c$ . Dále víme, že  $a + b + c > 5$  a  $0 < c < 5$ , jinak by výraz  $9c$  končil číslicí nepřevyšující 5; pro  $c = 0$  by pak i  $x = 0$ . Ostatní možnosti jsou dány v tabulce.

| c | 9c | a+b+c | a+b |
|---|----|-------|-----|
| 1 | 9  | 9     | 8   |
| 2 | 18 | 8     | 6   |
| 3 | 27 | 7     | 4   |
| 4 | 36 | 6     | 2   |

Vztah  $9(100a + 10b + c) = 1000a + 100d + 10d + (a + b + c)$  ještě upravíme na tvar

$$100(b - a - d) = 10d + a + 11b - 8c. \quad (1)$$

Číslice  $a, b, c, d$  jsou nejvýše rovny devíti, tedy hodnota pravé strany je menší než 200 a aspoň -72. Je tedy buď  $b - a - d = 0$  nebo  $b - a - d = 1$ .

Z prvního případu plyne, že  $d = b - a$ , po úpravě (1) na tvar  $8c = 3(7b - 3a)$  vidíme, že  $c$  je násobkem tří. Z tabulky pak plyne, že  $c = 3, a = 4 - b \Rightarrow a = b = 2$ . Tedy  $x = 223$  a hledané čtyřmístné číslo je 2007.

Druhý případ  $b - a - d = 1$  je pak  $d = b - a - 1$ , dosadíme do (1) a zjistíme, že  $8c + 110 = 3(7b - 3a)$ . Výraz  $8c + 110$  je tedy dělitelný třemi a proto musí  $c$  dávat zbytek 2 při dělení třemi. Z tabulky  $c = 2$  a  $b = 6 - a$  do rovnice  $8c + 110 = 3(7b - 3a)$  zjistíme, že  $a = 0$ , což odporuje tomu, že Klára měla na papíře napsané trojmístné číslo.