59. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n a k větší než 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ dělitelné dvanácti.

2. Dokažte, že pro libovolná čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnost

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4,$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

3. Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný.

4. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y, které vyhovují soustavě rovnic

$$\lfloor x+y \rfloor = 2\,010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

jestliže a) $p = 2$, b) $p = 3$.
Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než dané reálné číslo x (tzv. dolní celá část reálného čísla x).

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 30. března 2010

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

59. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Vzhledem k tomu, že $12 = 3\cdot 4$, stačí ukázat, že číslo $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2-1) = (n-1)n(n+1)n^{k-1}$ je dělitelné třemi a čtyřmi. První tři činitelé posledního výrazu jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, takže právě jedno z nich je dělitelné třemi, a proto i číslo a je dělitelné třemi. A je dělitelné i čtyřmi, neboť při sudém n je v posledním výrazu druhý a čtvrtý činitel sudý, zatímco při lichém n je sudý první a třetí činitel. Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení. Položme $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2-1) = (n-1)n^k(n+1)$. Opět ukážeme, že a je dělitelné čtyřmi a třemi. Je-li n sudé, je n^k dělitelné čtyřmi pro každé celé $k \geqq 2$. Je-li n liché, jsou činitelé $n-1$ a $n+1$ sudá čísla, takže a je dělitelné čtyřmi pro každé celé $n \geqq 2$.

Dělitelnost třemi je zřejmá pro $n = 3l$. Je-li $n = 3l+1$, kde l je celé kladné číslo, je třemi dělitelný činitel $n-1$ (a tedy i číslo a). Je-li $n = 3l+2$ (l je celé nezáporné), je třemi dělitelný činitel $n+1$. Protože jiné možnosti vzhledem ke zbytku čísla n při dělení třemi nejsou, je číslo a dělitelné třemi. Tím je požadovaný důkaz proveden.

Za úplný a správně zdůvodněný důkaz udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vhodný rozklad čísla a na součin, po dvou bodech za důkazy dělitelnosti třemi a čtyřmi a jeden bod za správný závěr.

Dělitelnost čtyřmi lze samozřejmě dokázat i rozborem možností $n = 4l$, $n = 4l+1$, $n = 4l+2$, $n = 4l+3$. Podobně pro dělitelnost třemi je možno využít známé tvrzení, že druhá mocnina celého čísla nikdy nedává při dělení třemi zbytek 2.

2. Danou nerovnost ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned}
(a^2b^2+a^2+b^2+1)-(a^2-2a+1)(b^2-2b+1) &\geqq 4,\\
(a^2b^2+a^2+b^2+1)-(a^2b^2-2ab^2+b^2)+(2a^2b-4ab+2b)-(a^2-2a+1) &\geqq 4,\\
2ab(a+b)-4ab+2(a+b) &\geqq 4,\\
2(a+b)(ab+1) &\geqq 4(ab+1),\\
2(ab+1)(a+b-2) &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Vzhledem k předpokladu $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ je $a+b \geqq 2$, takže upravená nerovnost zřejmě platí. Rovnost v ní (a tedy i v zadané) nerovnosti přitom nastane, právě když $a+b = 2$ neboli $a = b = 1$.

Jiné řešení. Při označení $m = a^2+1$ a $n = b^2+1$ lze levou stranu dokazované nerovnosti přepsat do tvaru $L = mn - (m-2a)(n-2b) = 2an + 2bm - 2ab - 2ab$, z nějž vytýkáním dostaneme $L = 2a(n-b) + 2b(m-a)$.

Čísla a, b jsou z intervalu $\langle 1, \infty)$, proto $1 = m - a^2 \leqq m - a$. Odtud $2b(m-a) \geqq 2$. Analogicky dostaneme $2a(n-b) \geqq 2$. Je tedy $L \geqq 4$ a rovnost nastává, právě když $a = b = 1$.

Jiné řešení. Po substituci $a = 1+m$ a $b = 1+n$, kde $m, n \geqq 0$, získá levá strana nerovnosti tvar

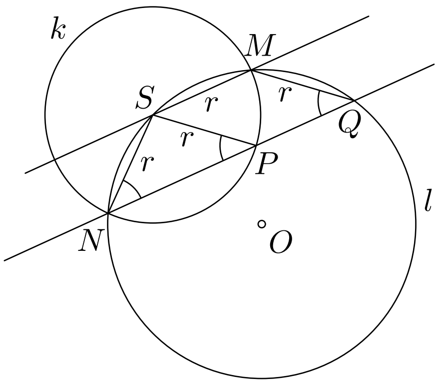
$$L = (m^2+2m+2)(n^2+2n+2) - m^2n^2.$$

Po roznásobení, které si stačí pouze představit, se zruší člen m^2n^2, takže L bude součtem nezáporných členů, mezi nimiž bude i člen $2\cdot 2 = 4$. Tím je nerovnost $L \geqq 4$ dokázána.

A protože mezi zmíněnými členy budou rovněž $4m$ a $4n$, z rovnosti $L = 4$ plyne $m = n = 0$, což naopak zřejmě i rovnost $L = 4$ zaručuje. To znamená, že rovnost nastává, právě když $a = b = 1$.

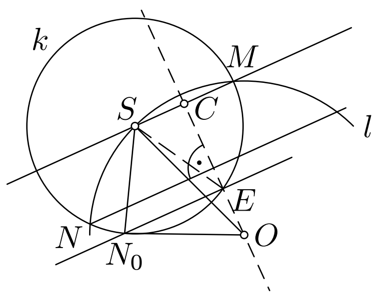
Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů.

3. Poloměr kružnice k označme r. Označení vrcholů P, Q v trojúhelníku MPQ není důležité, proto bez újmy na obecnosti označme jako P ten z bodů přímky vedené bodem N rovnoběžně s přímkou MS, který leží na kružnici k. Bod Q pak leží na kružnici l a čtyřúhelník $NQMS$ je lichoběžník vepsaný kružnici l (obr. 1). Je tedy rovnoramenný s rameny MQ a NS délky r. Navíc i úsečky SP a SM mají délku r. Z rovnoramenného trojúhelníku NPS a rovnoramenného lichoběžníku $NQMS$ plyne rovnost úhlů $|\sphericalangle SPN| = |\sphericalangle SNP| = |\sphericalangle MQP|$. Příčka PQ tedy protíná přímky SP a MQ pod stejně velkými úhly, a proto (podle věty o souhlasných úhlech) jsou přímky SP a MQ rovnoběžné. Čtyřúhelník $PQMS$ je tudíž rovnoběžník, a protože $|SM| = |SP| = r$, je to dokonce kosočtverec. Odtud je již zřejmé, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný s rameny PQ a MQ délky r.



Obr. 1

Poznámka. Existence tětiv NP a NQ v zadání je zaručena díky předpokladu, že kružnice l má větší poloměr než kružnice k. Označíme-li C střed úsečky SM a E ten průsečík kružnice k s osou úsečky SM, který leží v polorovině SMO, bude střed O kružnice l ležet na polopřímce CE až za bodem E (obr. 2). Další průsečík N obou kružnic proto



Obr. 2

padne do pásu mezi rovnoběžkami SM a N_0E v polorovině OCS, kde N_0 je čtvrtý vrchol kosočtverce s vrcholy S, M, E. K tomu stačí ukázat, že kružnice l protne polopřímku EN_0

až za bodem N_0, že tedy její poloměr OS je větší než délka úsečky ON_0. Toto srovnání dvou stran trojúhelníku OSN_0 snadno plyne z porovnání jeho vnitřních úhlů: úhel u vrcholu N_0 je největší, neboť oba úhly při protilehlé straně OS jsou menší než $60°$ (trojúhelník ESN_0 je rovnostranný). Snadno nahlédneme, že každá z rovnoběžek uvedeného pásu protíná každou z obou kružnic ve dvou bodech (vždy souměrně sdružených podle příslušné osy kolmé na SM).

Tím je prokázána nejen existence obou tětiv NP a NQ, ale i to, že jejich krajní body P a Q leží na stejnou stranu od bodu N (jako na obr. 1), neboť oba body zřejmě leží v polorovině opačné ke zmiňované polorovině OCS.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění, že $NQMS$ je rovnoramenný lichoběžník, 1 bod za důkaz shodnosti úhlů SNP a SPN, 2 body za důkaz, že $PQMS$ je rovnoběžník a 1 bod za zdůvodnění $|PQ| = |MQ| = r$. Existenci obou tětiv vyšetřovanou v závěrečné poznámce není nutné dokazovat, protože je předpokladem úlohy.

4. Protože číslo p je celé, je i $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Původní soustava rovnic je tedy ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor + y &= 2\,010,\\ \lfloor x \rfloor - y &= p,\end{aligned}$$

kterou snadno vyřešíme například sčítací metodou. Obdržíme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2\,010+p)$ (což může platit jen pro sudá p) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pro $p = 2$ je řešením soustavy libovolné $x \in \langle 1\,006, 1\,007)$ a $y = 1\,004$.

b) Pro $p = 3$ nemá soustava řešení.

Jiné řešení. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, pak $x = a + t$, kde $t \in \langle 0, 1)$.

a) Pro $p = 2$ soustavu přepíšeme do tvaru $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2\,010$. Z poslední rovnice plyne $2a-2 = 2\,010$, odtud $a = 1\,006$. Jelikož $t \in \langle 0, 1)$, vyhovuje původní soustavě každé $x \in \langle 1\,006, 1\,007)$, přičemž $y = 1\,004$.

b) Pro $p = 3$ dostáváme $y = a-3$ a $\lfloor 2a-3+t \rfloor = 2\,010$. Poslední rovnice je ekvivalentní se vztahem $2a - 3 = 2\,010$, kterému nevyhovuje žádné celé číslo a. Pro $p = 3$ nemá daná soustava rovnic řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za vyřešení úkolu a) a 2 body za úkol b).