59. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2 009, ve druhé 2 010 a v poslední 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru.*

Řešení. Jsou-li počty zápalek na jednotlivých hromádkách a, b, c, řekneme, že hra je v pozici (a, b, c). Celkový počet zápalek je na začátku sudý a po každém tahu se zmenší o 2, proto zůstává stále sudý. Zanechá-li některý hráč po svém tahu pozici $(2, 2, c)$, kde c je nějaké kladné sudé číslo, donutí soupeře vytvořit aspoň jednu jednozápalkovou hromádku a to mu umožní dalším tahem vyhrát. Pozice $(2, 2, c)$ mohla vzniknout z pozice $(3, 3, c)$ nebo z pozice $(3, 2, c+1)$, tedy z pozic, v nichž jsou dvě čísla lichá a jedno sudé.

Dokážeme, že zanechávání pozic se třemi sudými čísly zajistí výhru. Z takové pozice soupeř jakýmkoliv svým tahem vytvoří pozici se dvěma čísly lichými a jedním sudým. Odebereme-li potom zápalky ze stejných hromádek jako v předešlém tahu soupeř, vytvoříme opět pozici se třemi sudými čísly. Strategie zanechávání pozic se třemi sudými čísly je tedy realizovatelná (za předpokladu, že celkový počet zápalek je sudý). Celkový počet zápalek se stále zmenšuje a počty zápalek na jednotlivých hromádkách se po každém tahu zmenší nanejvýš o 1. Proto musí dojít k situaci, kdy aspoň na jedné hromádce zůstane přesně jedna zápalka. To se ale může stát jen po soupeřově tahu (číslo 1 je totiž liché). Odebráním této zápalky spolu s kteroukoliv další hru vítězně zakončíme.

Popsanou strategii může použít hráč, který začíná, odebere-li ve svém prvém tahu po jedné zápalce z první a třetí hromádky. Pokud ale udělá jiný tah, může vítěznou strategii uplatnit jeho soupeř.

Návodné a podobné úlohy:

1. V misce je 100 bílých a 110 černých kuliček. Hráč může v každém svém tahu odebrat jednu bílou nebo jednu černou nebo jednu bílou spolu s jednou černou kuličkou. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Vyhrává ten, po jehož tahu zůstane miska prázdná. Popište vítěznou strategii pro některého hráče. [Zanechávat v misce sudý počet bílých i sudý počet černých, může ji uplatnit hráč, který nezačíná.]
2. Na hromádce je 2 009 zápalek. V každém tahu může hráč odebrat jednu nebo dvě zápalky. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Ten, který vezme poslední zápalku, prohrává. Popište vítěznou strategii pro některého hráče. [Zanechat v misce po každém tahu $3k+1$ zápalek, může ji uplatnit začínající hráč.]
3. Na jedné hromádce je 2 009, na druhé 2 020 zápalek. V každém tahu si hráč zvolí jednu hromádku a odebere z ní jednu nebo dvě zápalky. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Vyhrává ten, po jehož tahu nezůstane na stole žádná zápalka. Popište vítěznou strategii pro některého hráče. [Zanechávat takové počty zápalek, aby jejich rozdíl byl dělitelný třemi, může ji uplatnit začínající hráč.]

2. *Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána.*

Řešení. Počet kladných dělitelů čísla, jehož rozklad na prvočinitele má tvar $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, je $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_r+1)$. Proto číslo, které má přesně $6 = 3 \cdot 2$ kladných dělitelů, musí mít jeden z tvarů p^5 nebo p^2q, kde p a q jsou prvočísla.

Uvažujme nejdříve možnost p^5. Toto číslo má dělitele 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5; zřejmě $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5$. Dva nejmenší dělitelé jsou jednomístní a další dva dvojmístní. Větší z nich, tedy p^3, ale není druhou mocninou přirozeného čísla.

Hledané číslo má tedy tvar p^2q a jeho dělitelé jsou 1, p, p^2, q, pq, p^2q. Je-li $p > q$, potom $1 < q < p < pq < p^2 < p^2q$. Dva dvojmístní dělitelé by byli p a pq, ale pq není druhou mocninou přirozeného čísla.

Musí tedy být $p < q$. Ze všech šesti dělitelů jsou druhými mocninami přirozeného čísla jen 1 a p^2. Proto je p^2 větší ze dvou dvojmístných dělitelů a odtud vyplývá $1 < p < q < p^2 < pq < p^2q$. Dělitelé 1 a p jsou jednomístní, q a p^2 jsou dvojmístní, pq aspoň trojmístný a p^2q čtyřmístný. Odtud vyplývá $p \in \{5, 7\}$, $9 < q < p^2$, $pq > 99$, $999 < p^2q < 10\,000$.

Pro $p = 5$ dostáváme $9 < q < 25$, $5q > 99$ a $999 < 25q < 10\,000$, těmto podmínkám žádné prvočíslo q nevyhovuje.

Pro $p = 7$ dostáváme $9 < q < 49$, $7q > 99$ a $999 < 49q < 10\,000$; těmto podmínkám vyhovují $q \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.

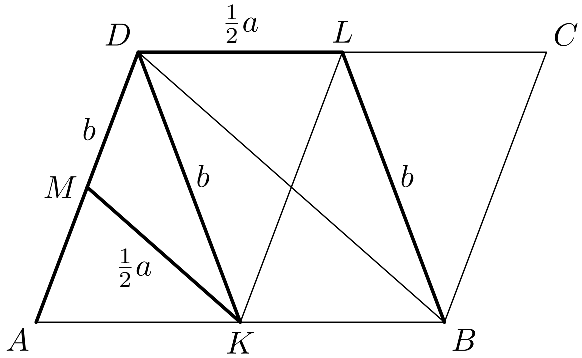
Na tabuli je tedy napsáno jedno ze sedmi čísel $49 \cdot 23 = 1\,127$, $49 \cdot 29 = 1\,421$, $49 \cdot 31 = 1\,519$, $49 \cdot 37 = 1\,813$, $49 \cdot 41 = 2\,009$, $49 \cdot 43 = 2\,107$, $49 \cdot 47 = 2\,303$.

Návodné a podobné úlohy:

1. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má přesně 2 009 kladných dělitelů. $[2^{40} \cdot 3^6 \cdot 5^6 = 12\,524\,124\,635\,136\,000\,000]$
2. Která čtyřmístná čísla mají nejvíce dělitelů? [7 560 a 9 240 mají 64 kladných dělitelů]
3. Najděte všechna lichá čtyřmístná čísla, která mají více než 10 kladných dělitelů, z nichž aspoň 30 % jsou druhé mocniny přirozených čísel. [1 125, 1 323, 2 025, 3 087, 3 267, 3 969, 4 563, 6 075, 6 125, 7 803, 8 575, 9 747, 9 801]

3. *V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB, CD, DA označené po řadě K, L, M platí: body A, B, L, D leží na jedné kružnici a rovněž body K, L, D, M leží na jedné kružnici.*

Řešení. Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ délky stran hledaného rovnoběžníku (obr. 1). Lichoběžníku $ABLD$ lze opsat kružnici, proto je rovnoramenný, a tudíž $|BL| = b$. Protože úsečky KB a DL jsou rovnoběžné a shodné, je $KBLD$ rovnoběžník, a tedy $|KD| = |BL| = b$. To znamená, že trojúhelník AKD je rovnoramenný, takže bod D musí ležet na ose jeho základny AK.



Obr. 1

Úsečka KL je střední příčkou rovnoběžníku $ABCD$, proto $KL \parallel MD$; $KLDM$ je tedy lichoběžník, a jelikož se mu dá opsat kružnice, je rovnoramenný a odtud $|KM| = |DL| = \frac{1}{2}a$. Protože KM je střední příčka trojúhelníku BDA, má strana BD délku $2 \cdot |KM| = a$. Bod D tedy leží na kružnici se středem B a poloměrem a.

Konstrukce: Sestrojíme střed K úsečky AB, osu o úsečky AK a kružnici k se středem B a poloměrem $|AB|$. Průsečík této kružnice s osou úsečky AK je bod D. Bod C je potom průsečík přímek vedených body D a B rovnoběžně s přímkami AB a AD.

Důkaz: Čtyřúhelník $ABCD$ má protilehlé strany rovnoběžné, je to tedy rovnoběžník. Označme L a M středy úseček CD a AD. Z toho, že bod D leží na ose úsečky AK, vyplývá $|KD| = |AD|$. Protože $KBLD$ je rovnoběžník, platí $|BL| = |KD| = |AD|$. Lichoběžník $ABDL$ je tedy rovnoramenný, a proto body A, B, L, D leží na jedné kružnici. Úsečka KM je střední příčka trojúhelníku BDA, proto $|KM| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AB| = |DL|$; $KLDM$ je tedy rovnoramenný lichoběžník, takže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

Diskuse: Protože přímka o má od bodu B menší vzdálenost než bod A, protíná kružnici k ve dvou bodech. Úloha má tedy v každé polorovině s hraniční přímkou AB jedno řešení.

Jiné řešení. Stejně jako v prvém řešení dokážeme, že $|KD| = |AD|$ a $|DB| = |AB|$. Trojúhelníky AKD a DAB jsou tedy rovnoramenné, a protože se shodují v úhlu u vrcholu A, jsou podobné. Proto $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$ čili $\frac{1}{2}a/b = b/a$ a odtud $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Bod D je tedy průsečíkem kružnic se středy A a K a poloměrem $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Návodné a podobné úlohy:

1. Dokažte, že lichoběžníku se dá opsat kružnice, právě když je rovnoramenný.
2. Dokažte, že pro délky stran a, b a délky úhlopříček e, f rovnoběžníku platí $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$.
3. Strana AB rovnoběžníku $ABCD$ má délku a. Kružnice opsaná trojúhelníku ABD protíná polopřímku opačnou k polopřímce CD v bodě L; označme $x = |CL|$. Vypočítejte délku tětivy, kterou přímka CD vytíná na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [$|a - x|$]

4. *Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel.*

Řešení. Označme prostřední z hledaných čísel a. Součet čísel $a-1\,004, a-1\,003, \ldots, a+1\,003, a+1\,004$ je $2\,009a = 41 \cdot 49 \cdot a$, přičemž $2\,004 \leqq a \leqq 8\,995$. Má platit $41 \cdot 49 \cdot a = n(n+1)(n+2)$ pro vhodné přirozené číslo n. Protože

$$2\,009 \cdot 2\,004 \leqq n(n+1)(n+2) < (n+1)^3,$$

musí platit $n + 1 > \sqrt[3]{2\,009 \cdot 2\,004}$, a tedy $n \geqq 159$. Podobně z nerovností

$$2\,009 \cdot 8\,995 \geqq n(n+1)(n+2) > n^3$$

dostáváme $n < \sqrt[3]{2\,009 \cdot 8\,995}$ čili $n \leqq 262$.

Součin $n(n+1)(n+2)$ má být dělitelný čísly 41 a 49. Žádný z činitelů n, $n+1$, $n+2$ nemůže být dělitelný oběma čísly 41 i 49, neboť $41 \cdot 49 > 262 + 2$. Sedmi je dělitelný nanejvýš jeden z činitelů $n, n+1, n+2$; proto musí být některý z nich dělitelný číslem 49. Budeme tedy mezi čísly $159, 160, \ldots, 264$ hledat taková dvě, jejichž rozdíl je

1 nebo 2, přičemž jedno z nich je dělitelné číslem 41 a druhé číslem 49. Násobky čísla 41 v uvedeném rozsahu jsou $164, 205$ a 246, násobky čísla 49 jsou 196 a 245. Vyhovující čísla jsou tedy 245 a 246 a my máme dvě možnosti:

a) $n = 245$, $n+1 = 246$, $n+2 = 247$, $a = \dfrac{245 \cdot 246 \cdot 247}{2\,009} = 7\,410$ a hledaná čísla jsou $6\,406, 6\,407, \dots, 8\,414$;

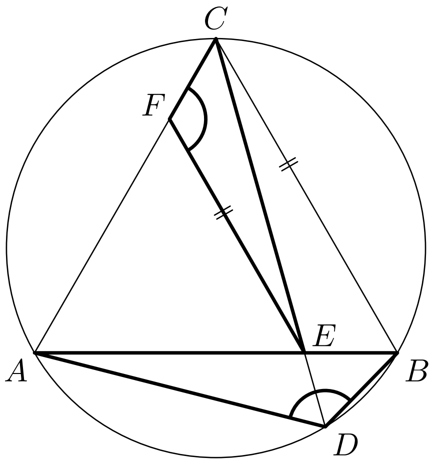
b) $n = 244$, $n+1 = 245$, $n+2 = 246$, $a = \dfrac{244 \cdot 245 \cdot 246}{2\,009} = 7\,320$ a hledaná čísla jsou $6\,316, 6\,317, \dots, 8\,324$.

Návodné a podobné úlohy:

1. Najděte 20 po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla. [Taková čísla neexistují, neboť každý takový součet je dělitelný dvěma, ne však čtyřmi.]
2. Najděte 2 009 po sobě jdoucích pětimístných čísel, jejichž součet je třetí mocninou přirozeného čísla. [$10\,763, 10\,764, \dots, 12\,771$ nebo $93\,132, 93\,133, \dots, 95\,140$]
3. Součet druhých mocnin jedenácti po sobě jdoucích trojmístných čísel je násobkem čísla 2 009; najděte tato čísla. [$508, 509, \dots, 518$ nebo $753, 754, \dots, 763$]

5. *Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D. Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E. Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD.*

Řešení. Veďme bodem E rovnoběžku se stranou BC a označme F její průsečík se stranou AC. Trojúhelník AEF je rovnostranný, proto $|EF| = |AE|$ a také $|CF| = |BE|$. Trojúhelník FEC má tedy délky stran $|AE|, |BE|, |CE|$ (obr. 2), které nás zajímají. Dokážeme, že je podobný trojúhelníku ABD:



Obr. 2

Oba trojúhelníky se zřejmě shodují ve vyznačeném tupém úhlu velikosti $120°$ ($|\sphericalangle ADB| = 180° - |\sphericalangle ACB|$). Úhly ACD a ABD jsou obvodové nad tětivou AD, proto jsou shodné. Podle věty *uu* tedy skutečně platí $\triangle ECF \sim \triangle ABD$.

Jiné řešení. Obvodové úhly DAB a DCB jsou shodné stejně jako úhly ADC a ABC, proto $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Odtud vyplývá

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Analogicky jsou podobné i trojúhelníky DEB a AEC, takže

$$\frac{|BE|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Z rovností

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|BD|}$$

pak vyplývá podobnost trojúhelníku s délkami stran $|AE|$, $|CE|$, $|BE|$ a trojúhelníku ABD.

Návodné a podobné úlohy:

1. Jestliže se tětivy AB a CD kružnice k protínají v bodě M, jsou trojúhelníky AMC a DMB podobné. Dokažte.
2. Nechť E je vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Označme D ($D \neq C$) průsečík přímky CE s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Dále označme F průsečík strany AC s přímkou, která prochází bodem E a je rovnoběžná s BC. Dokažte, že trojúhelníky ABD a ECF jsou podobné.
3. Nechť ABC je trojúhelník, v němž $|AC| \neq |BC|$. Dokažte, že osa úhlu BCA se s osou strany AB protíná v bodě, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

6. *Reálná čísla a, b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.*

a) Dokažte nerovnost $b > 3$.

b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic.

Řešení. Označme x_1 menší a x_2 větší kořen první rovnice. Potom platí $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = b - 1$. Druhá rovnice má kořen $x_2 - x_1$, a protože součet obou jejích kořenů je (stejně jako u první rovnice) roven číslu a, musí být druhý kořen $a - (x_2 - x_1) = x_1 + x_2 - x_2 + x_1 = 2x_1$. Součin kořenů druhé rovnice je tak $(x_2 - x_1) \cdot 2x_1 = b + 1$. Odtud dostáváme $b = -1 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 = -1 + 2(b-1) - 2x_1^2$, a tedy

$$b = 3 + 2x_1^2 > 3, \tag{1}$$

neboť z rovnosti $x_1 = 0$ by vyplývalo $b + 1 = b - 1 = 0$.

Protože $x_2 - x_1 > 0$ a $b + 1 > 0$, musí být kladný i druhý kořen $2x_1$ druhé rovnice, tedy $x_1 > 0$; z rovnosti (1) tak máme

$$x_1 = \sqrt{\frac{b-3}{2}} \quad \text{a dále} \quad x_2 = \frac{b-1}{x_1} = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Kořeny druhé rovnice jsou pak

$$x_2 - x_1 = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} \quad \text{a} \quad 2x_1 = \sqrt{2(b-3)}.$$

Jiné řešení. Kořeny prvé rovnice jsou

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2},$$

přičemž pro diskriminant platí

$$D = a^2 - 4(b-1) > 0. \tag{2}$$

Rozdíl kořenů $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 4b + 4}$ je kořenem druhé rovnice, proto

$$\begin{gathered}
a^2 - 4b + 4 - a\sqrt{a^2 - 4b + 4} + b + 1 = 0, \\
a^2 - 3b + 5 = a\sqrt{a^2 - 4b + 4}, \\
a^4 + 2a^2(5 - 3b) + (3b-5)^2 = a^4 - 4a^2 b + 4a^2, \\
(3b-5)^2 = a^2(2b-6).
\end{gathered} \tag{3}$$

Rovnost $a = 0$ nastává, právě když $3b - 5 = 0$; potom by ale neplatilo (2). Proto $a^2 > 0$, $(3b-5)^2 > 0$, a tedy i $2b - 6 > 0$ čili $b > 3$. Z (2) a (3) potom vyplývá $a > 0$ (pro $b > 3$ je totiž $a^2 - 3b + 5 > a^2 - 4b + 4 = D > 0$), takže

$$a = \frac{3b-5}{\sqrt{2(b-3)}};$$

dále pak

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b-5}{\sqrt{2(b-3)}} - \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \sqrt{\frac{b-3}{2}},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b-5}{\sqrt{2(b-3)}} + \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Druhá rovnice má kořeny

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} = x_2 - x_1$$

a

$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \sqrt{2(b-3)}.$$

Návodné a podobné úlohy:

1. Najděte všechny dvojice čísel a, b, pro něž má každá z rovnic $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ v množině reálných čísel dva různé kořeny, přičemž každý kořen druhé rovnice je o 1 větší než některý z kořenů prvé rovnice. [$a = -1, b = -3$]
2. Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b, pro něž mají každé dvě z rovnic $x^2 - 10x + a = 0$, $x^2 - 16x + b = 0$, $x^2 - 18x + a + b = 0$ aspoň jeden společný kořen. [$a = b = 0$ nebo $a = 16$, $b = 64$]
3. Najděte všechny dvojice čísel a, b, pro něž má každá z rovnic $x^2 - 15x + a = 0$, $x^2 - 15x + b = 0$ v množině reálných čísel dva různé kořeny, přičemž kladný rozdíl kořenů každé rovnice je kořenem zbývající rovnice. [$a = b = 0$; $a = b = 50$; $a = 54$, $b = 36$; $a = 36$, $b = 54$]