59. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x-y^2} &= z-1,\\ \sqrt{y-z^2} &= x-1,\\ \sqrt{z-x^2} &= y-1.\end{aligned}$$

2. Najděte všechny možné hodnoty podílu

$$\frac{r+\varrho}{a+b},$$

kde r je poloměr kružnice opsané a ϱ poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami délek a a b.

3. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 33$. V jednom kroku zvolíme několik čísel napsaných na tabuli (aspoň dvě), jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla, zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných z nich není druhou mocninou. Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 1. prosince 2009

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

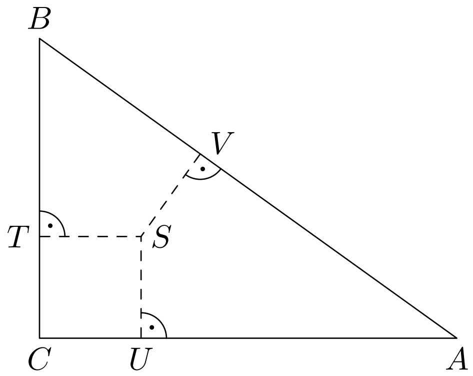
Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Hodnoty odmocnin jsou vždy nezáporné a odmocňované hodnoty také, proto neznámé x, y, z musí splňovat podmínky $x, y, z \geqq 1$, $x \geqq y^2$, $y \geqq z^2$ a $z \geqq x^2$. Z posledních tří nerovností máme $\max\{x, y, z\} \geqq \max\{y^2, z^2, x^2\}$, opačná (neostrá) nerovnost platí díky tomu, že $t \leqq t^2$ pro každé $t \geqq 1$. Proto $\max\{x, y, z\} = \max\{y^2, z^2, x^2\} = 1$, tedy $x = y = z = 1$ a obě strany všech tří rovnic soustavy jsou rovny nule (to je zkouška).

Obměna postupu: namísto úvahy o maximech můžeme po zjištění z první věty řešení pokračovat následovně: platí $x \geqq y^2 \geqq y \geqq z^2 \geqq z \geqq x^2$, nerovnost mezi krajními výrazy $x \geqq x^2$ již znamená $x = 1$, takže i hodnoty y, z z uvedeného řetězce šesti členů jsou rovny 1.

Závěr. Soustava má jediné řešení $x = y = z = 1$.

Za úplné řešení je 6 bodů, není-li provedena zkouška a podané řešení ji vyžaduje, strhněte 1 bod. Při neúplných řešeních za vypsání *všech šesti* nerovností z první věty řešení udělte 1 bod, 1 bod přidělte i těm, kdo hledanou trojici uhodnou. Úplná řešení založená na umocňování rovnic (bez podstatného využití nerovnosti $t \leqq t^2$ pro každé $t \geqq 1$) nejsou úlohové komisi známa, pokud se taková objeví, prosíme o jejich zaslání.



2. Pro délky úseků stran obecného trojúhelníku ABC k bodům dotyku vepsané kružnice (označeným podle obr.) platí vzorce

$$|AU| = |AV| = \frac{b + c - a}{2}, \ |BV| = |BT| = \frac{a + c - b}{2}, \ |CT| = |CU| = \frac{a + b - c}{2},$$

které lze snadno získat vyřešením soustavy rovnic

$$|AV| + |BV| = c, \quad |AU| + |CU| = b, \quad |BT| + |CT| = a.$$

Body C, T, U spolu se středem S vepsané kružnice jsou obecně vrcholy deltoidu, který je v případě pravého úhlu ACB čtvercem o straně $\varrho = |SU| = |SV|$. Porovnání s výše uvedenými vzorci pro délky úseků CT, CU vede ke vztahu

$$\varrho = \frac{a + b - c}{2};$$

podle Thaletovy věty v takovém pravoúhlém trojúhelníku navíc platí $r = \frac{1}{2}c$. Dohromady dostáváme
$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2}.$$
Zkoumaný podíl $(r+\varrho)/(a+b)$ má proto v libovolném pravoúhlém trojúhelníku jedinou možnou hodnotu, rovnou číslu $\frac{1}{2}$.

Podané řešení lze obměňovat, zejména tak, že namísto obecných vzorců pro úseky stran vyjdeme z rovností $|CT| = |CU| = \varrho$, z nichž plyne $|AV| = |AU| = b - \varrho$ a $|BV| = |BT| = a - \varrho$, tudíž
$$2r = c = |AB| = |AV| + |BV| = (b-\varrho) + (a-\varrho),$$
odkud je již závěr nasnadě.

Jiné řešení. Pro obsah P obecného trojúhelníku ABC platí vzorec
$$2P = \varrho(a+b+c);$$
k jeho odvození stačí sečíst obsahy trojúhelníků ABS, ACS a BCS se shodnou výškou ϱ ke stranám původního trojúhelníku. V případě $\gamma = 90°$ je ovšem $2P = ab$ a kromě toho, jak už jsme zmínili výše, $r = \frac{1}{2}c$. Spolu s Pythagorovou větou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostáváme
$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ac+bc+c^2+2ab}{2(a+b+c)} = \frac{ac+bc+a^2+b^2+2ab}{2(a+b+c)} =$$
$$= \frac{(a+b)c+(a+b)^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2},$$
a docházíme tak ke stejnému závěru jako v původním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Známé vzorce pro délky úseků stran k bodům dotyku vepsané kružnice není nutné dokazovat, stejně jako vztah mezi obsahem, poloměrem kružnice vepsané a obvodem trojúhelníku. Při neúplných řešeních udělte 1 bod za vzorec $r = \frac{1}{2}c$; za vyjádření ϱ ve tvaru $\varrho = \frac{1}{2}(a+b-c)$ udělte 3 body, z toho 1 bod za objev čtverce $CUST$, zatímco za vzorec $2P = \varrho(a+b+c)$ pouze 1 bod (poslední dva zisky nelze sčítat).

3. Součin všech čísel zapsaných na tabuli je roven
$$S = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31.$$
Přítomnost lichých exponentů znamená, že S není druhou mocninou. Proto nemůžeme smazat v prvním kroku všechna napsaná čísla, prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 dokonce nesmažeme nikdy. Ze všech ostatních čísel, která se účastnit úprav mohou, vznikne vždy neprázdný soubor čísel, takže na tabuli bude pořád alespoň $5 + 1 = 6$ čísel. Ukažme, že 6 je hledaný nejmenší počet popisem jednoho (z řady možných) postupů.

Kvůli lichým exponentům u prvočísel 2, 3, 5 a 11 vyčleníme nejdříve například skupinu čísel $A = \{2, 9, 11, 22, 25\}$ a všechna ostatní čísla různá od 17, 19, 23, 29 a 31 zařadíme do skupiny
$$B = \{3,4,5,6,7,8,10,12,13,14,15,16,18,20,21,24,26,27,28,30,32,33\}.$$

V prvním kroku vybereme všechna čísla z A a nahradíme je číslem

$$n = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Protože součin všech čísel z B je $2^{31-2} \cdot 3^{15-2} \cdot 5^{7-2} \cdot 7^4 \cdot 11^{3-2} \cdot 13^2 = 2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2$, vybereme v druhém kroku číslo n spolu se všemi čísly z B a nahradíme je číslem

$$\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2)} = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Pak už zůstane na tabuli pouze šest čísel, což je, jak jsme vysvětlili, nejmenší možný počet.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za úvahu o prvočíslech 17, 19, 23, 29 a 31, 2 body za zjištění lichých exponentů u prvočísel 2, 3, 5 a 11 a 3 body za popis postupu vedoucího k cílovým šesti číslům (šesté číslo různé od 17, 19, 23, 29 a 31 může při různých postupech vyjít různě).