58. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie C

1. *Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz?*

Řešení. Dohromady chlapci dostali $3 + 2 + 1 + 8 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 42$ Kč. Toto číslo lze jednoznačně vyjádřit jako součet čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel: $42 = 9 + 10 + 11 + 12$. Čtyři chlapci tedy (v nějakém pořadí) vybrali sumy 9, 10, 11 a 12 Kč.

Žádný chlapec nemohl dostat 8 Kč zároveň od druhého i od pátého kolemjdoucího (jinak by měl alespoň 16 Kč, nejvíce však mohl každý z chlapců dostat 12 Kč). Takže od druhého a pátého mají tři chlapci po 8 Kč a jeden od nich nedostal nic. Nejvýše jeden z těchto tří chlapců mohl dostat 4 Kč od čtvrtého kolemjdoucího, jinak by měli už alespoň dva chlapci alespoň 12 Kč. Čtvrtý kolemjdoucí musel tedy dát 4 Kč právě jednomu z nich a 4 Kč zbývajícímu chlapci. Bez peněz prvního a třetího kolemjdoucího tedy mají chlapci vybráno 12, 8, 8 a 4 Kč. Chlapec, který dostal v součtu od druhého, čtvrtého a pátého kolemjdoucího dvanáct korun, už nemohl dostat od prvního a třetího kolemjdoucího nic, neboť by měl více než dvanáct korun. Ten, který dostal v součtu od druhého, čtvrtého a pátého kolemjdoucího 4 Kč, musel dostat od prvního a třetího v součtu maximální možnou částku, tj. $3 + 2 = 5$ Kč, jinak by měl celkově méně než 9 Kč (dostal tedy právě 9 Kč a má nejméně). Takže nejméně vybral Honza, neboť on dostal od prvního kolemjdoucího 3 Kč, a nejvíc Petr, který od prvního kolemjdoucího nedostal nic.

Úvahy snadno dokončíme a ukážeme, že popsané rozdělení *je* vskutku *možné*. Jak už víme, Honza vybral 9 Kč a Petr 12 Kč, Jirka, který dostal 2 Kč od prvního, nemohl dostat od třetího nic, takže dostal celkem 10 Kč, a Martin 11 Kč. Všechny úvahy můžeme přehledně uspořádat do tabulky, kterou postupně doplňujeme:

1	2	3	4	5	Σ
	8		0	0	
	0		0	**8**	
0	0	0	**4**	**8**	$12 \to$ P
3	0	**2**	**4**	0	$\leqq 9 \to$ H
1+2+3	1×8	2×2	2×4	2×8	

Návodné úlohy:

1. Ukažte, že přirozené číslo n lze vyjádřit jako součet čtyř po sobě jdoucích čísel, právě když $n \geqq 10$ a n dává zbytek dvě po dělení čtyřmi. [$(k + 1) + (k + 2) + (k + 3) + (k + 4) = 4k + 10$]

2. Dokažte, že libovolné přirozené číslo $n \geqq 3$, které není mocninou čísla 2, lze vyjádřit jako součet několika po sobě jdoucích přirozených čísel. [$n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$ pro n liché, $n = (\frac{n}{p} - \frac{p-1}{2}) + (\frac{n}{p} - \frac{p-1}{2} + 1) + \ldots + (\frac{n}{p} + \frac{p-1}{2})$ pro $n = p \cdot q$, kde $p > 1$ je lichý dělitel]
3. V klobouku je pět koulí a na každé z nich je napsáno jedno přirozené číslo. Součet čísel na koulích v klobouku je 27 a čísla na libovolných dvou koulích se liší alespoň o dvě. Dokažte, že v klobouku není koule s číslem 6. [V klobouku mohou být buď koule s čísly 1, 3, 5, 7, 11, nebo 1, 3, 5, 8, 10.]

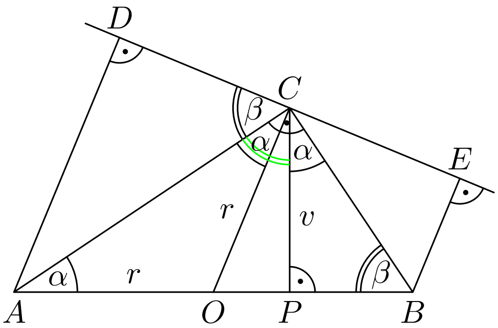
2. *Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC.*

Řešení. Označme odvěsny trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a, b a protilehlé úhly α, β. Střed přepony AB (střed opsané kružnice) označíme O (obr. 1).

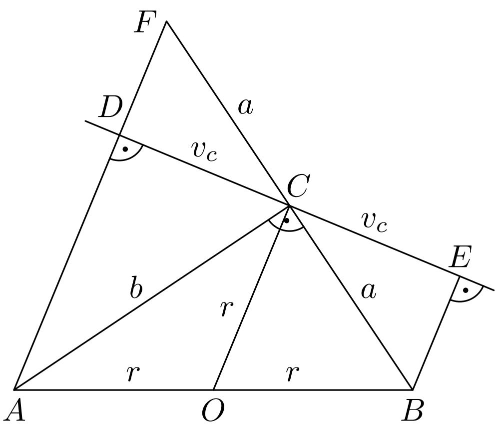
Výška $v = CP$ rozděluje trojúhelník ABC na trojúhelníky ACP a CBP podobné trojúhelníku ABC podle věty *uu* ($\alpha + \beta = 90°$), úsečka OC je kolmá na DE a navíc $|OC| = |OA| = r$ (poloměr opsané kružnice). Odtud $|\sphericalangle OCA| = |\sphericalangle OAC| = \alpha$ a $|\sphericalangle DCA| = 90° - |\sphericalangle OCA| = \beta$.

Pravoúhlé trojúhelníky ACP a ACD se společnou přeponou AC se tudíž shodují i v úhlech při vrcholu C. Jsou proto shodné, dokonce souměrně sdružené podle přímky AC. Analogicky jsou trojúhelníky CBP a CBE souměrně sdružené podle BC. Je tedy $|CD| = |CE| = v$, tudíž $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, neboť z dvojího vyjádření dvojnásobku obsahu trojúhelníku ABC plyne $v = ab/|AB|$, přičemž $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka. Místo dvojího vyjádření obsahu můžeme k výpočtu výšky CP využít podobnost trojúhelníků CBP a ABC: $\sin\alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



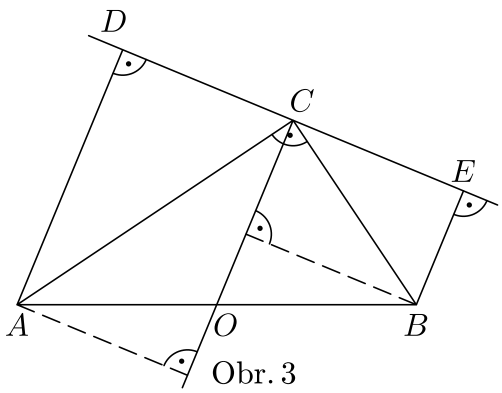
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Úsečka OC je střední příčkou lichoběžníku $DABE$, neboť je rovnoběžná se základnami a prochází středem O ramene AB. Je proto D obrazem bodu E v souměrnosti podle středu C. Obraz F bodu B v téže souměrnosti leží na polopřímce AD za bodem D (obr. 2). Je $|CF| = |BC| = a$, úhel ACF je pravý, trojúhelníky AFC a ABC jsou tedy shodné. Vidíme, že CD je výška v trojúhelníku AFC shodná s výškou v_c trojúhelníku ABC, a DE je jejím dvojnásobkem. Velikost výšky v_c dopočítáme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Úsečky CD a CE (obr. 3) jsou shodné s výškami rovnoramenných trojúhelníků ACO, BCO na společnou stranu OC. Protože tyto dva trojúhelníky mají ve srovnání s třetím trojúhelníkem ABC poloviční obsah a i jejich společná strana OC je oproti přeponě AB poloviční, jsou obě výšky na stranu OC trojúhelníků ACO, BCO shodné s výškou na stranu AB trojúhelníku ABC. Jeho výšku dopočítáme jako v prvním řešení.



Obr. 3

Odpověď. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$.

Návodné úlohy:

1. Vyjádřete výšku v_c pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C pomocí stran a, b, c tohoto trojúhelníku.
2. Nechť k je kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB délky c. Označme S střed strany AB a D a E průsečíky os stran BC a AC s týmž obloukem AB kružnice k. Vyjádřete obsah trojúhelníku DSE pomocí délky přepony c. [$c^2/8$]
3. Vyjádřete obsah rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD pomocí délek a, c jeho základen a délky b jeho ramen. [$\frac{1}{4}(a+c)\sqrt{4b^2-(a-c)^2}$]
4. V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblouk AC kružnice, jejíž střed leží na straně AB, protíná stranu CD v bodě M. Dokažte, že přímky AM a BD jsou navzájem kolmé. [48–C–I–2]

3. *Najděte všechna čtyřmístná čísla n, která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla n jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo n je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n, je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi.*

Řešení. V řešení budeme značit číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n, jako $\bar{n}$. Rozlišíme tři případy.

(i) Číslo n má tvar $aabb$, kde a, b jsou různé cifry. Je tedy $n = 1\,100a + 11b$ a $\bar{n} = 1\,100b + 11a$. Číslo 7 má dělit jak n, tak $\bar{n}$, tedy i jejich rozdíl $n - \bar{n} = 1\,089(a-b)$ a součet $n + \bar{n} = 1\,111(a+b)$. Protože ani číslo 1 089, ani číslo 1 111 nejsou násobkem sedmi a sedm je prvočíslo, tak $7 \mid a-b$ i $7 \mid a+b$. Použijeme-li stejnou úvahu ještě jednou, vidíme, že $7 \mid (a-b)+(a+b) = 2a$ a $7 \mid (a+b)-(a-b) = 2b$, tedy $7 \mid a$ a $7 \mid b$, neboli $a, b \in \{0, 7\}$. Číslice a, b jsou navzájem různé, proto jedna z nich musí být 0. Ale potom jedno z čísel $aabb$, $bbaa$ není čtyřmístné. Hledané číslo n tedy nemůže být uvedeného tvaru.

(ii) Číslo n má tvar $abab$. Potom $7 \mid n = 1\,010a + 101b$ a rovněž $7 \mid \bar{n} = 1\,010b + 101a$. Podobně jako v předchozím případě odvodíme, že $7 \mid n - \bar{n} = 909(a-b)$ a $7 \mid n + \bar{n} = 1\,111(a+b)$, a ze stejných důvodů jako v předchozím případě zjišťujeme, že $7 \mid a$, $7 \mid b$. Některá z číslic by tedy musela být 0. Číslo n tak nemůže být ani tvaru $abab$.

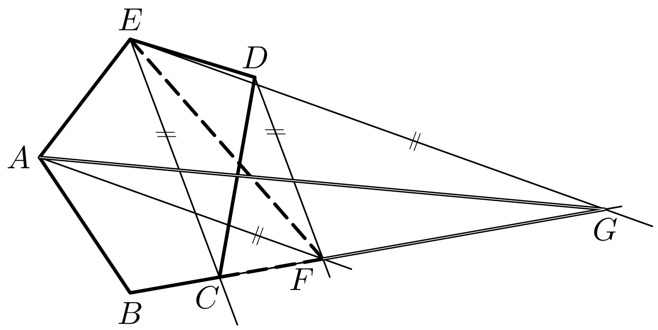
(iii) Číslo n má tvar $abba$. Potom obrácením pořadí číslic vznikne totéž číslo, takže máme jedinou podmínku $7 \mid 1\,001a + 110b$. Protože $7 \mid 1\,001$ a $7 \nmid 110$, je tato podmínka ekvivalentní s podmínkou $7 \mid b$. Proto $b \in \{0, 7\}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq b$. Vyhovuje tak všech 17 čísel, která právě uvedené podmínky splňují: 1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, 1 771, 2 772, 3 773, 4 774, 5 775, 6 776, 8 778, 9 779.

Návodné úlohy:

1. Určete počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která jsou dělitelná šesti a v jejichž zápisu se vyskytují právě dvě jedničky. [56–C–S–1]
2. Určete počet všech trojic dvojmístných přirozených čísel a, b, c, jejichž součin abc má zápis, ve kterém jsou všechny číslice stejné. Trojice lišící se pouze pořadím čísel považujeme za stejné, tj. započítáváme je pouze jednou. [54–C–I–5]
3. K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m a n. [52–C–I–5]

4. *Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na polopřímce BC sestrojte takový bod G, aby obsah trojúhelníku ABG byl shodný s obsahem daného pětiúhelníku.*

Řešení. *Rozbor*: Nejprve uvažme bod F, který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s EC jdoucí bodem D (protože $E \notin BC$, jsou EC a BC různoběžky, obr. 4). Obsahy trojúhelníků ECD a ECF jsou shodné (mají společnou stranu EC a shodnou výšku na tuto stranu), obsah pětiúhelníku $ABCDE$ je tedy shodný s obsahem čtyřúhelníku $ABFE$.



Obr. 4

Dále uvažme bod G, který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s AF jdoucí bodem E. Potom jsou opět obsahy trojúhelníků AFE a AFG shodné, a jsou proto shodné i obsahy čtyřúhelníku $ABFE$ a trojúhelníku ABG. Bod G tak má požadovanou vlastnost.

Hledaný bod je na polopřímce BC jediný, neboť pro různé body X, Y na polopřímce BC mají trojúhelníky ABX a ABY různé výšky na společnou stranu AB, mají tedy různé obsahy.

Popis konstrukce:

1. p; $p \parallel EC$, $D \in p$;
2. F; $F \in p \cap BC$;
3. q; $q \parallel AF$, $E \in q$;
4. G; $G \in q \cap BC$;

Úloha má jediné řešení.

Návodné úlohy:

1. Označme P průsečík úhlopříček daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné, právě když trojúhelníky ADP a BCP mají stejný obsah. [Rovnost obsahů trojúhelníků ADP a BCP je ekvivalentní s rovností obsahů trojúhelníků ABC a ABD se společnou stranou AB.]
2. V kružnici o poloměru 2 je dána tětiva AB délky 3. Určete, jaký největší obsah může mít čtyřúhelník $AXBY$, leží-li jeho vrcholy X, Y na kružnici k. [Největší obsah 6 má deltoid, jehož úhlopříčka XY je průměrem kružnice k.]
3. Je dán obdélník $ABCD$. Nechť přímky p a q, které procházejí vrcholem A, protínají polokružnice vně připsané stranám BC a CD daného obdélníku po řadě v bodech K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a rovněž strany BC a CD po řadě v bodech P a Q tak, že trojúhelník ABP má stejný obsah jako trojúhelník KCP a zároveň trojúhelník AQD má stejný obsah jako trojúhelník CLQ. Dokažte, že body K, L, C leží na téže přímce. [53–C–I–2]

5. *Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.)*

Řešení. Čísla od 1 do 99 rozdělíme podle jejich zbytku při dělení číslem 11 do jedenácti devítiprvkových skupin T_0, T_1, …, T_{10}:

$$\begin{aligned} T_0 &= \{11, 22, 33, \ldots, 99\},\\ T_1 &= \{\ \ 1, 12, 23, \ldots, 89\},\\ T_2 &= \{\ \ 2, 13, 24, \ldots, 90\},\\ &\ \ \vdots\\ T_{10} &= \{10, 21, 32, \ldots, 98\}. \end{aligned}$$

Vybereme-li jedno číslo z T_0 (víc jich ani vybrat nesmíme) a všechna čísla z T_1, T_2, T_3, T_4 a T_5, dostaneme vyhovující výběr $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel, neboť součet dvou čísel z 0, 1, 2, 3, 4, 5 je dělitelný 11 jedině v případě $0 + 0$, z množiny T_0 jsme však vybrali pouze jedno číslo.

Na druhou stranu v libovolném vyhovujícím výběru je nejvýše jedno číslo ze skupiny T_0 a nejvýše 9 čísel z každé ze skupin

$$T_1 \cup T_{10},\ T_2 \cup T_9,\ T_3 \cup T_8,\ T_4 \cup T_7,\ T_5 \cup T_6,$$

neboť při výběru 10 čísel z některé skupiny $T_i \cup T_{11-i}$ by mezi vybranými bylo některé číslo ze skupiny T_i i některé číslo ze skupiny T_{11-i}; jejich součet by pak byl dělitelný 11. Celkem je tedy ve výběru nejvýše $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel.

Poznámka. Možná to učesané řešení vypadá příliš trikově. Avšak počáteční úvahy každého řešitele k němu rychle vedou: jistě záleží jen na zbytcích vybraných čísel, takže rozdělení na třídy T_i a vybírání z nich je přirozené. Je jasné, že z T_0 může být vybráno jen jedno číslo a vše další, o co se musíme starat, je požadavek, abychom nevybrali zároveň po číslu ze skupiny T_i i ze skupiny T_{11-i}. Je-li už vybráno některé číslo z třídy T_i, kde $i \neq 0$, můžeme klidně vybrat všechna čísla z T_i, to už zkoumanou vlastnost nepokazí. Je proto dokonce jasné, jak *všechny* výběry největšího počtu čísel vypadají.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Ukažte, že z libovolných n přirozených čísel lze vybrat několik (třeba i jedno) tak, že jejich součet je dělitelný n. [Uvažte čísla a_1, $a_1 + a_2$, …, $a_1 + \ldots + a_n$ a jejich zbytky po dělení n.]
2. Zjistěte, pro která přirozená čísla n ($n \geqq 2$) je možno z množiny $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ vybrat aspoň dvě navzájem různá sudá čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný číslem n. [54–C–I–2]
3. Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel. [55–C–I–3]

6. *Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí*

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

ŘEŠENÍ. Levou nerovnost dokážeme ekvivalentními úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \qquad \Big| \cdot 6(a+b) \\ 3(a+b)^2 &< 4(a^2+ab+b^2), \\ 0 &< (a-b)^2. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost vzhledem k předpokladu $a \neq b$ platí. Také pravou nerovnost ze zadání budeme ekvivalentně upravovat, začneme umocněním každé strany na druhou:

$$\begin{aligned} \frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} &< \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad \Big| \cdot 18(a+b)^2 \\ 8(a^2+ab+b^2)^2 &< 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\ 8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) &< 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\ 6a^2b^2 &< a^4+b^4+2a^3b+2ab^3. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je součtem nerovností $2a^2b^2 < a^4 + b^4$ a $4a^2b^2 < 2a^3b + 2ab^3$, které obě platí, neboť po převodu členů z levých stran na pravé dostaneme po rozkladu už zřejmé nerovnosti $0 < (a^2 - b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a-b)^2$.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Pro a, $b \in \mathbb{R}$ dokažte
$$a^4 + b^4 \geqq a^3b + b^3a.$$
[Převeďte na tvar $(a^3 - b^3)(a-b) \geqq 0$.]
2. Dokažte, že pro každá tři reálná čísla x, y, z, která splňují nerovnosti $0 < x < y < z < 1$, platí také nerovnost
$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + yz + zx + z - x.$$
[48–C–II–4]
3. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b a c platí nerovnost
$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$
[55–B–S–1]
4. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti
$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$
platí nerovnost
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$
Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [55–C–II–2]