58. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y &= 2, \\ x - y &= 2a, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

o neznámých x a y a reálném parametru a.

2. Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímky AC a BC. Sestrojte takový bod P, pro který přímka CP půlí úsečku KL.

3. Číslo nazveme *magickým*, právě když se dá vyjádřit jako součet trojmístného čísla m a trojmístného čísla m' zapsaného stejnými číslicemi v opačném pořadí. Některá magická čísla lze takto vyjádřit více způsoby; například $1554 = 579 + 975 = 777 + 777$. Určete všechna magická čísla, která mají takových vyjádření $m+m'$ co nejvíce. (Na pořadí m a m' nebereme zřetel.)

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 22. ledna 2009

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $2x = 2a + 1$, odečtením druhé rovnice od třetí $2y = -2a + 1$. Odtud vyjádříme

$$x = a + \tfrac{1}{2}, \quad y = -a + \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

a dosadíme do první rovnice původní soustavy. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$a^2 - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{2} = 0, \tag{2}$$

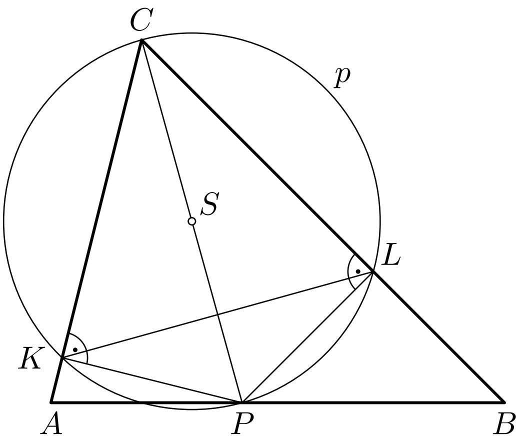
která má kořeny $a_1 = -1$ a $a_2 = \frac{3}{2}$. Pro každou z těchto dvou (jedině možných) hodnot parametru a již snadno stanovíme neznámé x a y dosazením do vzorců (1).

Daná soustava rovnic má řešení pouze pro dvě hodnoty parametru a, jednak pro $a = -1$, kdy je jejím jediným řešením $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, jednak pro $a = \frac{3}{2}$, kdy $(x, y) = (2, -1)$.

Zkouška dosazením je snadná, lze ji vynechat takovým zdůvodněním: Soustava dvou rovnic, kterou jsme dostali (a vyřešili) sečtením a odečtením druhé a třetí rovnice, je s touto dvojicí původních rovnic ekvivalentní. Zbylá (první) rovnice soustavy je pak ekvivalentní s kvadratickou rovnicí (2), jejímž řešením jsme našli možné hodnoty parametru a.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za správné vyjádření x a y z druhé a třetí rovnice, 2 body za vyřešení kvadratické rovnice, která vznikne dosazením těchto hodnot do první rovnice, a po 1 bodu za správnou odpověď a zkoušku. Za numerické chyby při výpočtu strhněte nejvýše 1 bod.

2. Označme S střed úsečky CP. Podle Thaletovy věty leží body K a L na kružnici p sestrojené nad průměrem CP. Předpokládejme, že bod P má požadovanou vlastnost, tj. že průměr CP půlí tětivu KL (obr. 1).



Obr. 1

Průměr libovolné kružnice půlí každý jiný průměr téže kružnice a také všechny tětivy k němu kolmé. A žádnou jinou tětivu půlit nemůže: když totiž prochází dvěma *různými* body její osy souměrnosti (totiž středem tětivy a středem kružnice), musí být — stejně jako tato osa — k dané tětivě kolmý.

Tětiva KL ovšem nemůže být průměrem kružnice p, protože podle Thaletovy věty by byl úhel KCL (a tedy i úhel ACB) pravý, což odporuje zadání, proto je tětiva KL k průměru CP kolmá. V tomto případě jsou trojúhelníky CKP a CLP souměrně sdruženy podle přímky CP, odkud již plyne, že úhly KCP a LCP jsou shodné. Polopřímka CP je tedy osou úhlu ACB.

Je-li naopak polopřímka CP osou úhlu ACB, shodují se pravoúhlé trojúhelníky CKP a CLP ve společné přeponě CP a ve dvou vnitřních úhlech, takže body K a L jsou souměrně sdruženy podle přímky CP. Proto tětiva CP půlí úsečku KL.

Odpověď. Existuje právě jeden vnitřní bod strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC, pro který úsečka CP půlí úsečku KL. Je to průsečík osy vnitřního úhlu při jeho vrcholu C se stranou AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body důkaz skutečnosti, že bod P musí ležet na ose úhlu ACB a 2 body za ověření, že bod ležící na ose úhlu má požadovanou vlastnost. Pokud řešitel bez důkazu uvede, že bod P leží na ose úhlu ACB, udělte jen 1 bod. Tvrzení o tětivách, jež průměr kružnice půlí, lze považovat za zřejmé. Naopak strhněte 1 bod, pokud si řešitel neuvědomí, že tětiva KL nemůže být průměrem kružnice p.

3. Každé trojmístné číslo má vyjádření $m = 100a + 10b + c$, kde a, b, c, $a \neq 0$, jsou jeho číslice. Trojmístné číslo zapsané stejnými číslicemi v opačném pořadí má pak vyjádření $m' = 100c + 10b + a$, $c \neq 0$. Protože na pořadí čísel m a m' není brán zřetel, pro určitost předpokládejme, že $m \leqq m'$ neboli $a \leqq c$, kde $a, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Pro magické číslo x podle zavedeného označení číslic platí

$$x = m + m' = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že hodnota x nezáleží tolik na jednotlivých číslicích a a c jako na jejich součtu $s = a + c$, který může nabývat hodnot $s \in \{2, 3, \dots, 18\}$. Dále už budeme pracovat pouze s vyjádřením $x = 101s + 20b$.

Předpokládejme na okamžik, že se jako součet $101s + 20b$ dá některé magické číslo x zapsat dvěma různými způsoby:

$$x = 101s + 20b = 101s' + 20b'. \tag{1}$$

Z rovnosti $101(s - s') = 20(b - b')$ a nesoudělnosti čísel 101 a 20 vyplývá, že číslo 101 musí dělit číslo $b - b'$. Protože však b a b' jsou číslice, platí $-9 \leqq b - b' \leqq 9$. V tomto intervalu najdeme jediné číslo dělitelné číslem 101, a to číslo 0. Je proto $b - b' = 0$ neboli $b = b'$, a tudíž i $s = s'$. To však odporuje předpokladu, že číslo x má dvě různá vyjádření tvaru (1). Znamená to, že ve vyjádření $x = 101s + 20b$ má každé magické číslo x jednoznačně určenou číslici b i jednoznačně určený součet s.

Počet způsobů, kterými lze magické číslo vyjádřit jako součet $m + m'$ neboli $101s + 20b$, se proto rovná počtu způsobů, kterými lze vyjádřit odpovídající hodnotu s jako součet dvou číslic a a c, kde $1 \leqq a \leqq c \leqq 9$. V množině $\{2, 3, \dots, 18\}$ má největší počet takových vyjádření číslo $s = 10$, jež se dá vyjádřit právě pěti vyhovujícími součty:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ostatní čísla mají takových vyjádření méně.

Skutečně: v případě $s \leqq 9$ z rovnosti $a+c \leqq 9$ a předpokladu $a \leqq c$ plyne $a \leqq 4$, takže menší číslice a nabývá nejvýše čtyř hodnot stejně jako větší číslice c v případě $s \geqq 11$, kdy ze vztahů $a+c \geqq 11$ a $a \leqq c$ plyne $c \geqq 6$.

Nejvíce (pěti) součty $m + m'$ se dají vyjádřit magická čísla tvaru $101 \cdot 10 + 20b$, kde $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, jedná se tedy o čísla z desetiprvkové množiny

$$\{1\,010, 1\,030, 1\,050, \ldots, 1\,190\}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body důkaz skutečnosti, že magické číslo má jediné vyjádření součtem $101s + 20b$. Poznatek, že největší počet vyjádření $s = a + c$ má číslo $s = 10$, je natolik zřejmý, že může být uveden bez zdůvodnění. V případě správného postupu s numericky chybným vyčíslením některých z 10 řešení strhněte nejvýše 1 bod.