

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Bára si napsala dvě různá celá čísla. Potom je (ve stejném pořadí) sečetla, odečetla, vynásobila a vydělila. Dostala čtyři výsledky, jejichž součet byl -100 . Když vynechala výsledek sčítání a sečetla zbývající tři výsledky, dostala také součet -100 . Jaká čísla mohla Bára původně napsat?

ŘEŠENÍ. Označme hledaná celá čísla a , b . Podle zadání platí dvě rovnosti:

$$(a + b) + (a - b) + ab + (a : b) = -100,$$

$$(a - b) + ab + (a : b) = -100.$$

Pokud se po vynechání výsledku sčítání, celkový součet nezmění, je zřejmé, že $a + b = 0$, tedy $a = -b$. Po dosazení do druhé rovnice dostaneme:

$$-b - b - b^2 - 1 = -100, \quad \text{tj.} \quad -(b + 1)^2 = -100.$$

Odtud $b + 1 = \pm 10$, tedy buď $b = 9$ (pak $a = -9$), nebo $b = -11$ (pak $a = 11$). Barbora si tedy mohla napsat buď čísla -9 a 9 , nebo čísla 11 a -11 .

[$a = -b \dots$ 1 bod,

$-(b + 1)^2 = -100 \dots$ 1 bod

dopočítání a odpověď $-9, 9 \dots$ 2 body,

dopočítání a odpověď $11, -11 \dots$ 2 body]

Z9–II–2

Z krychlíček o hraně 1 cm jsme postavili kvádr. Kdybychom z kvádrů odebrali jeden sloupec, zbytek stavby by se skládal z 602 krychlíček. Pokud bychom místo toho odebrali jeden řádek horní vrstvy, zůstala by nám stavba z 605 krychlíček. Jaké má kvádr rozměry?

ŘEŠENÍ. Hrany podstavy kvádrů měří x cm a y cm, výška kvádrů je v cm. Odebereme-li sloupec, tedy v krychlíček, bude počet zbylých krychlíček dělitelný číslem v . Pokud místo toho odebereme řádek, tedy x krychlíček, bude počet zbylých krychlíček dělitelný číslem x . Tedy číslo 602 je dělitelné v , číslo 605 je dělitelné x . Číslo $602 = 2 \cdot 7 \cdot 43$ má tyto dělitele (jedním z nich je v):

$$1, 2, 7, 14, 43, 86, 301, 602. \quad (1)$$

Číslo $605 = 5 \cdot 11 \cdot 11$ má tyto dělitele (jedním z nich je x):

$$1, 5, 11, 55, 121, 605. \quad (2)$$

V zadání čteme, že pokud odebereme v krychlíček, zbude o tři krychličky méně, než kdybychom odebrali x krychlíček. Tedy $x + 3 = v$. Ke každému číslu z řádku (2) přičtíme číslo tři a výsledné číslo se vždy pokusíme najít na řádku (1). To se podaří pouze v případě $11 + 3 = 14$. Tedy výška $v = 14$ cm, hrana $x = 11$ cm. Celkový počet krychlíček je $602 + 14 = 616$. Hrana $y = 616 : 14 : 11 = 4$ cm.

[$x + 3 = v \dots$ 1 bod,

602 je dělitelné v , 605 je dělitelné $x \dots$ 2 body,

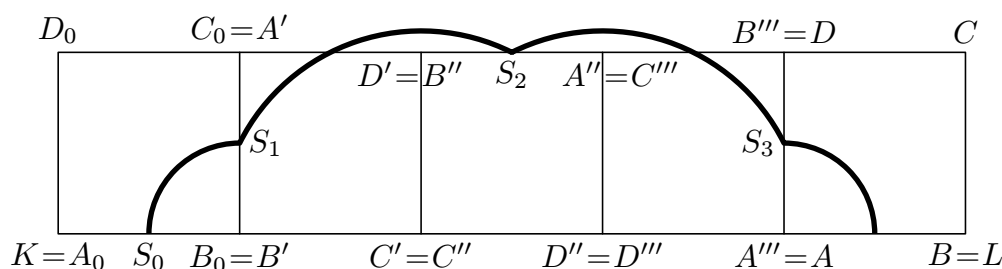
14 cm, 11 cm, 4 cm s vysvětlením \dots 3 body]

Z9-II-3

Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a a úsečka KL délky $5a$ tak, že $A \equiv K$ a strana AB leží na úsečce KL . Čtverec $ABCD$ se „kutálením“ (otáčením kolem pravého dolního rohu čtverce o 90°) pohybuje po úsečce KL tak dlouho, než strana AB opět splyne s částí úsečky KL ($B \equiv L$).

- Narýsujte, jak se bude pohybovat bod S , který je středem strany AB .
- Určete délku křivky, kterou bod S při pohybu opsal.

ŘEŠENÍ. a) Na začátku pohybu jsme polohu čtverce označili $A_0B_0C_0D_0$. Potom jsme postupně označovali vrcholy čárkami, přičemž jeho poslední poloha je označena $ABCD$. Dráha bodu S je na obr. 1 vyznačena silně.



Obr. 1

b) Délka křivky: Pro délku křivky je nutné si uvědomit, že se skládá ze čtyř čtvrtkružnic. Jsou přitom jen dva různé poloměry čtvrtkružnic: poloměr $B_0S_0 = \frac{1}{2}a$ a poloměr $|S_1C'| = \frac{1}{2}\sqrt{5}a$. Tedy délka křivky je

$$l = \frac{1}{4} 2\pi \frac{a}{2} + \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{5} \frac{a}{2} + \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{5} \frac{a}{2} + \frac{1}{4} 2\pi \frac{a}{2} = \frac{\pi a}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

[Narýsovaná dráha ... 2 body
poloměry ... 2 body
 $\frac{1}{2}\pi a(1 + \sqrt{5})$... 2 body]

Z9-II-4

Severských závodů psích spřežení se zúčastnilo dohromady celkem 315 dvojspřeží a trojspřeží. Do cíle dorazilo ve stanoveném limitu 60 % všech dvojspřeží a $\frac{1}{3}$ všech trojspřeží, takže do cíle dorazila včas přesně polovina všech psů. Kolik dvojspřeží a kolik trojspřeží závodilo?

ŘEŠENÍ. Označme d počet dvojspřeží a t počet trojspřeží. Ze zadání sestavíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} d + t &= 315, \\ 0,6 \cdot d \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot t \cdot 3 &= \frac{1}{2}(2d + 3t). \end{aligned}$$

Jejím řešením dostaneme $t = 90$, $d = 225$.

Na startu bylo 225 dvojspřeží a 90 trojspřeží.

[Sestavení rovnic ... 3 body
řešení soustavy ... 2 body
odpověď ... 1 bod]