57. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b větších než 1 tak, aby jejich součet i součin byly mocniny prvočísel (s kladnými celočíselnými mocniteli).

2. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je 15 cm^2 a obsah trojúhelníku FBE je 14 cm^2. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$.

3. Ve skupině šesti lidí existuje právě 11 dvojic známých. Vztah „znát se“ je vzájemný, tzn. jestliže osoba A zná osobu B, pak také B zná A. Pokud se kdokoli ze skupiny dozví nějakou zprávu, řekne ji všem svým známým. Dokažte, že se tímto způsobem zprávu dozví nakonec všichni.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 24. ledna 2008

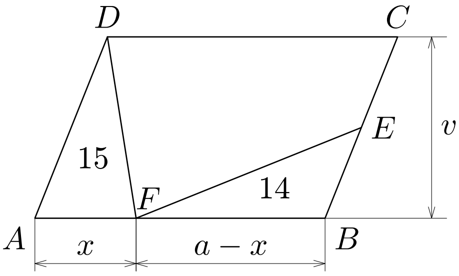
tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

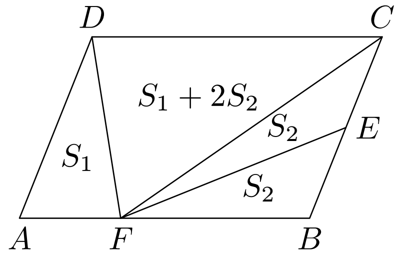
1. Z podmínky pro součin plyne, že a i b jsou mocninami téhož prvočísla p: $a = p^r$, $b = p^s$, kde r, s jsou celá kladná čísla. Kdyby bylo p liché, byl by součet $a + b$ dělitelný kromě čísla p i číslem 2, takže by nebyl mocninou prvočísla. Je-li $p = 2$ a $r < s$, je součet $a + b = 2^r(1 + 2^{s-r})$ opět číslo sudé dělitelné lichým číslem větším než 1, není tudíž mocninou prvočísla. Analogicky dojdeme ke stejnému závěru i v případě, kdy $r > s$. Zbývá proto jediná možnost: $a = b = 2^r$, kde r je celé kladné číslo. Zkouška $a+b = 2^r+2^r = 2^{r+1}$ a $ab = 2^{2r}$ potvrzuje, že řešením jsou všechny dvojice $(a, b) = (2^r, 2^r)$, kde r je celé kladné číslo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zjištění, že a, b jsou mocniny téhož prvočísla udělte bod, další bod za zdůvodnění, že $p = 2$. Dále pak 2 body za důkaz $r = s$ (vzhledem k symetrii lze rovnou předpokládat $r \leqq s$) a 1 bod za zkoušku.

2. Označme v vzdálenost bodu C od přímky AB, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pro obsahy trojúhelníků AFD a FBE (obr. 1) platí: $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtud $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sečtením obou rovnic nalezneme obsah rovnoběžníku $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\text{cm}^2$. Obsah čtyřúhelníku $FECD$ je tedy $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\text{cm}^2$.



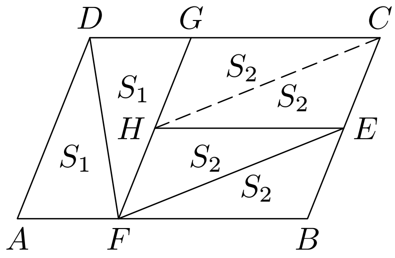
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Trojúhelníky BEF a ECF mají stejnou výšku z vrcholu F a shodné základny BE a EC. Proto jsou obsahy obou trojúhelníků stejné. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojúhelníku CDF je polovinou obsahu rovnoběžníku $ABCD$ (oba útvary mají společnou základnu CD a stejnou výšku), druhou polovinu tvoří součet obsahů trojúhelníků AFD a BCF. Odtud $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\text{cm}^2$.

Jiné řešení. Do rovnoběžníku přikreslíme úsečky FG a EH rovnoběžné se stranami BC a AB tak, jak znázorňuje obr. 3. Rovnoběžníky $AFGD$ a $FBEH$ jsou svými úhlopříč-



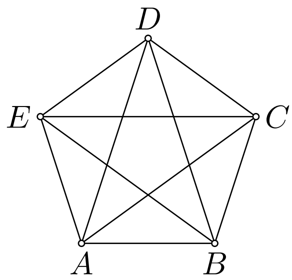
Obr. 3

kami DF a EF rozděleny na dvojice shodných trojúhelníků. Je tedy $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Ze shodnosti rovnoběžníků $HECG$ a $FBEH$ navíc snadno nahlédneme, že všechny čtyři trojúhelníky FBE, EHF, HEC a CGH jsou shodné, takže obsah čtyřúhelníku $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

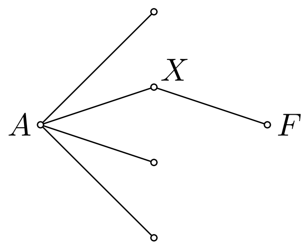
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za každou číselnou chybu nebo nepodstatnou chybu při zdůvodňování výpočtu některého obsahu strhněte bod, za hrubou chybu při zdůvodnění strhněte dva body. Je-li úloha nedořešena, udělte dva body za každou správně vypočtenou část obsahu čtyřúhelníku $FECD$.

3. Jednotlivé osoby označíme písmeny A, B, C, D, E a F. Aspoň jedna z nich (označme ji A) má aspoň čtyři známé (pokud by měla každá osoba nejvýše tři známé, bylo by známých dvojic méně než deset). Kdyby měla dokonce pět známých, dozví se zprávu od každého ve skupině a může ji komukoli ve skupině sdělit.

Pokud má osoba A právě čtyři známé, například osoby B, C, D a E, existuje ve skupině osob A, B, C, D, E nejvýše 10 známostí (obr. 4, dvojice známých znázorňují úsečky), a tak se osoba F musí znát s některou osobou $X \in \{B, C, D, E\}$. Možnost šíření zprávy od libovolné osoby ke kterékoli jiné snadno ověříme podle obr. 5.

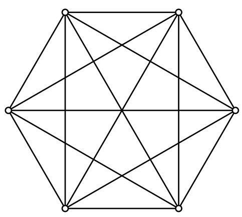


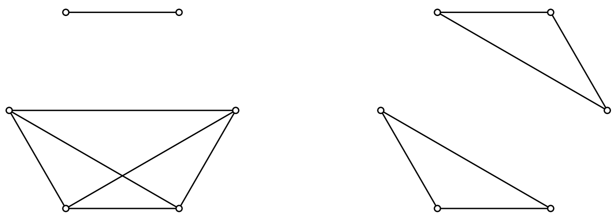
Obr. 4



Obr. 5

Jiné řešení. Znázornění kterékoli množiny právě jedenácti dvojic známých ve skupině šesti osob obdržíme odstraněním čtyř z patnácti hran úplného grafu (obr. 6, v něm z každého uzlu vychází právě pět hran). Po odstranění pouze čtyř hran z grafu na obr. 6 musí tedy z každého vrcholu vycházet aspoň jedna hrana. Ve skupině tedy neexistuje člověk, který by nikoho neznal. Aby se proto zpráva nemohla od některé z osob rozšířit ke všem ostatním, musela by v příslušném grafu existovat buď aspoň jedna oddělená dvojice, nebo dvě oddělené trojice, v nichž se osoby znají navzájem. V žádné z těchto situací však počet dvojic známých nepřevyšuje sedm, jak vidíme z obr. 7. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.


Obr. 6


Obr. 7

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz tvrzení, že některá osoba má aspoň čtyři známé, a 1 bod za vysvětlení, že neexistuje osoba, která by neměla známého.