57. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Uvažujme dvě kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnými parametry a, b. Zjistěte, jaké nejmenší a jaké největší hodnoty může nabývat součet $a + b$, existuje-li právě jedno reálné číslo x, které současně vyhovuje oběma rovnicím. Určete dále všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž uvažovaný součet těchto hodnot nabývá.

2. V trojúhelníku ABC má úhel α velikost $20°$. Vypočítejte velikosti úhlů β a γ, platí-li rovnost $a + 2v_a = b + 2v_b$.

3. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD.

4. Hokejový turnaj se hraje systémem „každý s každým“. V průběhu turnaje se každá dvojice družstev střetne právě jednou. Turnaj se odehrává po jednotlivých kolech. Při sudém počtu družstev sehraje každé v jednom kole jeden zápas, při lichém počtu má v každém kole jedno z družstev volno. Za remízu dostane každý ze soupeřů po jednom bodu. Pokud zápas neskončí remízou, dostane vítěz dva body, poražený nezíská žádný bod. O pořadí v tabulce rozhoduje především počet bodů, při rovnosti bodů pak skóre. Po odehrání několika kol neměla žádná dvojice družstev stejný počet bodů. Dokažte, že v tom případě už poslední v tabulce ztratil naději na celkové vítězství. Úlohu řešte pro turnaj

a) deseti družstev,
b) jedenácti družstev.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 1. dubna 2008

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Odečtením obou daných rovnic dostaneme rovnost $(b-a)x+a-b=0$ neboli $(b-a)(x-1)=0$, odtud plyne $b=a$ nebo $x=1$.

Jestliže $b=a$, mají obě rovnice tvar $x^2-ax-a=0$. Právě jedno řešení existuje, právě když je diskriminant a^2+4a nulový. To platí pro $a=0$ a pro $a=-4$. Protože $b=a$, má součet $a+b$ v prvém případě hodnotu 0 a ve druhém případě hodnotu -8.

Jestliže $x=1$, dostaneme z daných rovnic $a+b=1$, tedy $b=1-a$. Rovnice potom mají tvar

$$x^2-ax+a-1=0 \quad \text{a} \quad x^2+(a-1)x-a=0.$$

První má kořeny 1 a $a-1$, druhá kořeny 1 a $-a$. Právě jedno společné řešení tak dostaneme vždy s výjimkou případu, kdy $a-1=-a$ neboli $a=\frac{1}{2}$, kdy jsou společná řešení dvě.

Závěr. Nejmenší hodnota součtu $a+b$ je -8 a je dosažena pro $a=b=-4$. Největší hodnota součtu $a+b$ je 1; této hodnoty je dosaženo pro všechny dvojice $(a,1-a)$, kde $a\neq\frac{1}{2}$ je libovolné reálné číslo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jeden bod dejte za odvození podmínky $(b=a)\vee(x=1)$, dva body za vyřešení případu $b=a$, dva body za vyřešení případu $x=1$, jeden bod za správný závěr.

2. Z vyjádření výšek pomocí úhlu γ, tj. $v_a=b\sin\gamma$ a $v_b=a\sin\gamma$, dostaneme dosazením do předpokládaného vztahu rovnost $a+2b\sin\gamma=b+2a\sin\gamma$, která platí, právě když $(a-b)(1-2\sin\gamma)=0$.

Jestliže $a=b$, vychází $\beta=\alpha=20°$, takže $\gamma=140°$.

Jinak musí být $\sin\gamma=\frac{1}{2}$, takže $\gamma=30°$ nebo $\gamma=150°$; úhel β v obou případech dopočítáme jako $\beta=180°-\alpha-\gamma$.

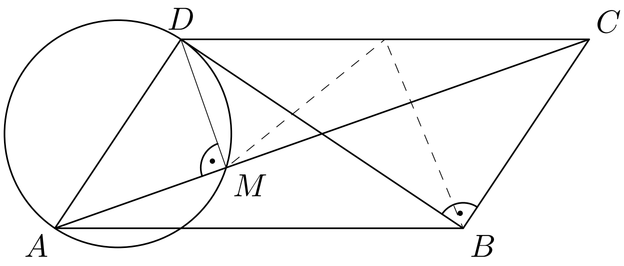
Úloha má tři řešení: $\beta=20°$ a $\gamma=140°$, $\beta=130°$ a $\gamma=30°$, $\beta=10°$ a $\gamma=150°$.

Jiné řešení. Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku ABC dostaneme rovnost $av_a=bv_b$. Hodnoty ve dvojicích a, $2v_a$ a b, $2v_b$ mají tedy stejné součiny a podle zadání i stejné součty, takže to jsou dvojice kořenů téže kvadratické rovnice, proto $\{a,2v_a\}=\{b,2v_b\}$. V případě $v_a=v_b$ je $a=b$, a tedy $\alpha=\beta$, případ $a=2v_b$ nastane, právě když má γ velikost 30 nebo 150 stupňů.

Poznámka. Úvahu o zmíněné kvadratické rovnici lze samozřejmě nahradit i přímým dosazením $b=a+2v_a-2v_b$ do rovnosti $av_a=bv_b$; po úpravě vyjde $(a-2v_b)(v_a-v_b)=0$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za nalezení některého ze vztahů vedoucího na výpočet úhlu gamma. Zbylé tři body dejte za úplnou diskusi všech možností. Za opomenutí tupého úhlu gamma strhněte bod.

3. Podle Thaletovy věty je úhel AMD pravý, proto je i úhel DMC pravý (obr. 1). Strany BC a AD jsou rovnoběžné, proto je úhlopříčka BD kolmá i ke straně BC. Body M a B tedy leží na Thaletově kružnici s průměrem CD. Mají proto od středu úsečky CD stejnou vzdálenost, takže zmiňovaný střed leží na ose úsečky MB.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dva body dejte za zjištění, že úhly DMC a DBC jsou pravé, dva body za poznatek, že body M a B leží na Thaletově kružnici s průměrem CD a dva body za odtud plynoucí závěr.

4. a) Turnaj se skládá z devíti kol. Má-li každé družstvo jiný počet bodů, musí mít první v tabulce aspoň o 9 bodů víc než poslední. Na zisk devíti bodů je nezbytné sehrát aspoň pět zápasů; to znamená, že už muselo proběhnout aspoň 5 kol, takže do konce turnaje zbývají nejvýše čtyři kola. V nich může poslední v tabulce získat maximálně 8 bodů a prvního už nemůže dostihnout.

b) V turnaji proběhne 11 kol (každé družstvo desetkrát hraje a jednou má volno). Má-li každé družstvo jiný počet bodů, muselo už být uděleno aspoň $0+1+2+\ldots+10 = 55$ bodů. V jednom kole se odehraje 5 zápasů, takže se rozdělí $5 \cdot 2 = 10$ bodů. Proto už muselo být odehráno aspoň 6 kol a do konce jich zbývá nejvýše pět.

Kdyby byl mezi některými sousedy v tabulce větší rozdíl než jednobodový, měl by první aspoň o 11 bodů víc než poslední a ve zbývajících nejvýše pěti kolech by jím nemohl být dostižen. Připusťme tedy, že rozdíly mezi sousedy v tabulce jsou pouze jednobodové. Má-li poslední b bodů (zřejmě $0 \leqq b < 11$), je celkový počet udělených bodů $b+(b+1)+(b+2)+ +\ldots+(b+10) = 11b+55$. K tomu bylo potřeba odehrát $k = \frac{1}{10}(11b+55) = b+5+\frac{1}{10}(b+5)$ kol. Počet odehraných kol je celé číslo, proto $10 \mid b+5$. Odtud vyplývá $b = 5$, a tedy $k = 11$. To znamená, že jsou odehrána všechna kola a poslední místo v tabulce je definitivní.

Jiné řešení části b). Stejně jako v prvním řešení dokážeme, že už muselo proběhnout aspoň 6 kol. Mezi prvním a posledním v tabulce je aspoň desetibodový rozdíl. Kdyby proběhlo kol aspoň 7, zbývala by do konce nejvýš 4 kola a v nich by nemohl poslední nejméně desetibodový náskok prvního vyrovnat. Předpokládejme tedy, že proběhlo přesně 6 kol, takže bylo rozděleno právě 60 bodů. Kdyby měl poslední v tabulce aspoň jeden bod, byl by celkový počet udělených bodů alespoň $1+2+3+\ldots+11 = 66 > 60$. Poslední tedy musel být bez bodu. Potom ale první musel mít více než 10 bodů, protože v opačném případě by byl bodový zisk všech družstev $0+1+2+\ldots+10 = 55 < 60$. Měl tedy první před posledním aspoň jedenáctibodový náskok, který už poslední ve zbývajících pěti kolech nemůže vyrovnat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vyřešení části a) dejte 2 body, z toho jeden bod za zjištění, že už muselo proběhnout aspoň 5 kol. V části b) jeden bod za důkaz, že už proběhlo aspoň 6 kol, jeden bod za vyřešení úlohy za předpokladu, že mezi některými sousedy v tabulce je větší rozdíl než jeden bod, a dva body za vyřešení úlohy v případě jednobodových rozdílů mezi sousedy. Podobně dejte bod (viz jiné řešení) za důkaz, že poslední nemůže dostihnout prvého, bylo-li už odehráno více než 6 kol, a 2 body za důkaz, že se to nemůže stát ani tehdy, bylo-li odehráno přesně 6 kol.