57. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Najděte všechna přirozená čísla k, pro něž je zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ v desítkové soustavě zakončen dvojčíslím a) 02; b) 04.*

Řešení. Opakovaným násobením číslem 6 zjistíme, že poslední dvojčíslí mocnin 6^k pro $k = 1, 2, 3, \dots$ jsou postupně

$$06, 36, 16, 96, 76, 56, 36, 16, 96, 76, 56, \dots, \qquad (1)$$

opakují se tedy od druhého členu s periodou délky 5. Podobně opakovaným násobením číslem 7 zjistíme, že poslední dvojčíslí mocnin 7^m pro $m = 1, 2, 3, \dots$ jsou postupně

$$07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, \dots, \qquad (2)$$

opakují se tedy již od prvního členu s periodou délky 4.

a) Protože každá mocnina šesti je zakončena číslicí 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončeno dvojkou, jedině když bude číslo 7^{2007-k} zakončeno dvojčíslím 07 (jiné dvojčíslí z (2) nevyhovuje). Násobením čísly 6, 36, 16, 96, 76 a 56 ovšem zjistíme, že číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ může mít v takovém případě na předposledním místě jen některou z číslic 1, 3, 4, 5, 7, 9. Zakončení dvojčíslím 02 proto není možné.

b) Protože každá mocnina šesti je zakončena číslicí 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončeno čtyřkou, právě když 7^{2007-k} bude zakončeno dvojčíslím 49 (jiné dvojčíslí z (2) nevyhovuje). Násobením všemi různými čísly z (1) zjistíme, že $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončeno dvojčíslím 04, jedině když 6^k končí dvojčíslím 96. Číslo 6^k končí na 96, právě když je mocnitel k tvaru $k = 4+5a$; číslo 7^{2007-k} končí na 49, právě když příslušný mocnitel má tvar $2\,007 - k = 2 + 4b$. Dosazením $k = 4 + 5a$ dostaneme rovnici $2\,007 - 4 - 5a = 2 + 4b$, kde a a b jsou celá nezáporná čísla. Z ní vychází

$$b = \frac{2\,001 - 5a}{4} = 500 - a - \frac{a-1}{4}.$$

Aby bylo b celé, musí být $a - 1$ dělitelné čtyřmi, tedy $a = 4c + 1$; potom $b = 499 - 5c$, $k = 9 + 20c$. Mocnitel $2\,007 - k$ rovný $1\,998 - 20c$ nemůže být záporný, proto $c \leqq 99$.

Číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončeno dvojčíslím 04, právě když je číslo k tvaru $k = 9+20c$, kde $c \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$.

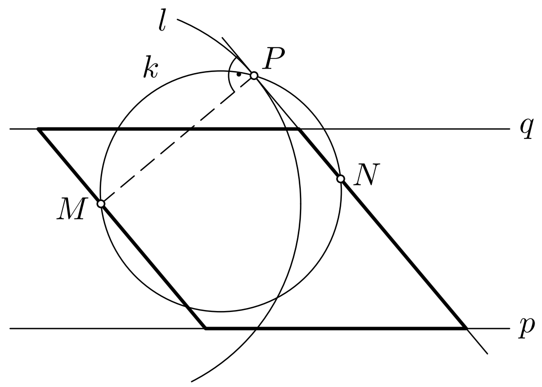
Poznámka. Rovnice tvaru $ax + by = c$, kde a, b, c jsou daná celá čísla a x, y celočíselné neznámé, se nazývá *lineární diofantická rovnice* o dvou neznámých. Žáci by se měli obeznámit s řešením takových rovnic.

Návodné a podobné úlohy:

1. Zjistěte, kterým dvojčíslím končí dekadický zápis čísla 7^{2007}. [43]
2. Určete všechna přirozená čísla k, pro něž dekadický zápis čísla $7^k + 9^k$ končí dvojčíslím 22. [$k = 20n + 8$]
3. Zjistěte, pro kolik přirozených čísel n menších než $1\,000$ je součet $n^{2007} + 2\,007^n + 1$ dělitelný sedmi. [95. Při dělení sedmi jsou zbytky čísel $n^{2\,007}$ stejné jako zbytky čísel n^3 a pro jednotlivá n se opakují s periodou délky 7, u čísel $2\,007^n$ jsou zbytky stejné jako u čísel 5^n a opakují se s periodou délky 6. Vyhovující n mají dvojí vyjádření $n = 7k = 6l + 3$, $n = 7k + 1 = 6l + 1$, $n = 7k + 2 = 6l + 1$ nebo $n = 7k + 4 = 6l + 1$.]

2. *V pásu mezi rovnoběžkami p, q jsou dány dva různé body M a N. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec, jehož dvě protější strany leží na přímkách p a q a body M a N leží po jednom na zbývajících dvou stranách.*

Řešení. V kosočtverci (čtverci) jsou vzdálenosti protilehlých stran stejné. Naším úkolem je tedy vést body M a N rovnoběžky, jejichž vzdálenost je rovna vzdálenosti d rovnoběžek p a q. Pata P kolmice z bodu M ke straně hledaného kosočtverce procházející bodem N leží na Thaletově kružnici nad průměrem MN a má od bodu M vzdálenost d (obr. 1). Odtud plyne *konstrukce*:

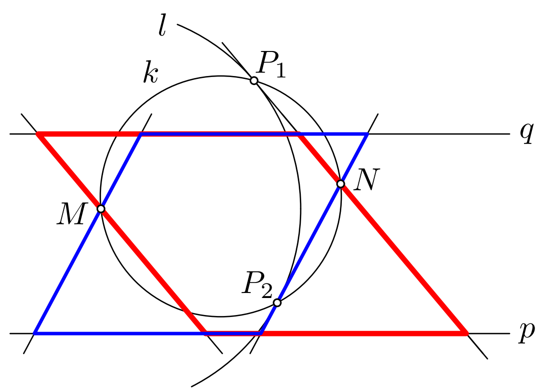


Obr. 1

Sestrojíme Thaletovu kružnici k nad průměrem MN a kružnici l se středem M, jejíž poloměr je roven vzdálenosti d přímek p a q. Označíme P průsečík kružnic k a l. Na přímce PN leží jedna ze stran hledaného (koso)čtverce. Protilehlá strana prochází bodem M a je s přímkou PN rovnoběžná.

Vzniklý rovnoběžník je skutečně kosočtverec nebo čtverec, neboť ze shodnosti výšek vyplývá shodnost stran.

Diskuse: Existence řešení je podmíněna existencí bodu P. Zřejmě pak nemůže být $NP \parallel q$, protože by to znamenalo, že je $|MP| < d$, takže rovnoběžky procházející body M, N vždy vytnou požadovaný rovnoběžník. Je-li $|MN| > d$, mají kružnice k a l dva různé průsečíky $P_1 \neq P_2$ (obr. 2), takže úloha má dvě řešení. Je-li $|MN| = d$, potom $P = N$; stranu kosočtverce procházející bodem N sestrojíme jako kolmici na MN a úloha má jen jedno řešení. V případě $|MN| < d$ nemá úloha řešení.



Obr. 2

Návodné a podobné úlohy:

1. V rovině jsou dány body A, B, přímka p a úsečka délky v. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož vrchol C leží na přímce p a jehož výška na stranu BC má délku v.
2. V rovině je dána přímka p a body M, N, S. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ tak, aby vrchol A ležel na přímce p, bod M na přímce AB, bod N na přímce BC a aby S byl průsečík jeho úhlopříček. [Uvažte obrazy přímky p a bodu M v otočení o $90°$ se středem S, které převede stranu AB na stranu BC.]
3. V rovině jsou dány tři rovnoběžné přímky a, b, c a přímka d s nimi různoběžná. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$. [Sestrojíme nejdřív libovolný čtverec $ABCD$, který splňuje první tři podmínky: Zvolme bod $B \in b$, vrchol A takového čtverce pak leží na přímce a a zároveň na přímce c otočené kolem bodu B o $90°$. Hledaný čtverec dostaneme posunutím ve směru rovoběžek a, b, c, v němž přímka $d' \parallel d$ obsahující vrchol D přejde v přímku d.]

3. *Jsou-li x a y reálná čísla, pro něž platí $x^3 + y^3 \leqq 2$, potom $x + y \leqq 2$. Dokažte.*

Řešení. Tvrzení dokážeme sporem. Připusťme, že platí $x+y > 2$. Potom $y > 2-x$, takže $y^3 > (2-x)^3$, neboť funkce $s = t^3$ je v proměnné t rostoucí v celém oboru reálných čísel. Proto platí

$$x^3 + y^3 > x^3 + (2-x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 = 6(x-1)^2 + 2 \geqq 2.$$

To je ve sporu s předpokladem. Tím je tvrzení dokázáno.

Jiné řešení. Dvojčlen $x^3 + y^3$ rozložíme na součin $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Kdyby platilo $x + y > 2$, pak bychom pro druhý činitel $x^2 - xy + y^2$ měli odhad

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 > 1.$$

Pro výraz $x^3 + y^3$ by pak platilo

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) > 2 \cdot 1 = 2.$$

To je opět ve sporu s předpokladem. Tím je tvrzení dokázáno.

Návodné a podobné úlohy:

1. Jsou-li x, y reálná čísla, pro něž platí $x + y > 2$, potom $x^2 + y^2 > 2$; dokažte. [Tvrzení plyne z nerovnosti $(x + y)^2 \leqq 2(x^2 + y^2)$.]
2. Nechť a, b, c jsou reálná čísla, jejichž součet je větší než 1. Dokažte, že součet jejich druhých mocnin je větší než $\frac{1}{3}$. [Tvrzení plyne z tzv. *Cauchyovy nerovnosti* $(x+y+z)^2 \leqq$ $\leqq 3(x^2+y^2+z^2)$, kterou lze ověřit úpravou do tvaru $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geqq 0$.]
3. Nechť x, y jsou nezáporná čísla, pro něž platí $x^2+y^2 > 2$. Dokažte, že potom $x^3+y^3 > 2$. [Potřebnou nerovnost $(x^2 + y^2)^3 \leqq 2(x^3 + y^3)^2$ dokážete tak, že rozdíl mezi pravou a levou stranu upravíte do tvaru $(x - y)^2(x^4 + 2xy^3 + 2xy^3 + y^4)$.]

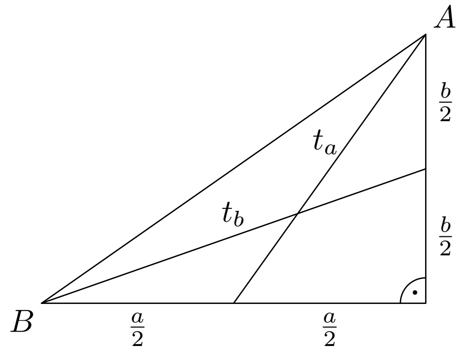
4. *Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran a, b, c a délkami těžnic t_a, t_b, t_c, pro něž platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba případy, kdy AB je a) přepona, b) odvěsna.*

ŘEŠENÍ. a) Nechť a i b jsou odvěsny (obr. 3). Potom podle Pythagorovy věty

$$t_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad t_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

takže podmínka $a + t_a = b + t_b$ má tvar

$$a + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b + \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$



Obr. 3

Protože z nerovnosti $a > b$ vyplývá (viz návodnou úlohu 1) $t_b > t_a$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$\begin{aligned}
2a - 2b &= \sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{4b^2 + a^2},\\
4a^2 - 8ab + 4b^2 &= 5a^2 + 5b^2 - 2\sqrt{(4a^2 + b^2)(4b^2 + a^2)},\\
2\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4} &= a^2 + 8ab + b^2,\\
16a^4 + 68a^2b^2 + 16b^4 &= a^4 + 16a^3b + 66a^2b^2 + 16ab^3 + b^4,\\
15a^4 - 16a^3b + 2a^2b^2 - 16ab^3 + 15b^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Mnohočlen na levé straně poslední rovnice je zřejmě dělitelný dvojčlenem $a - b$ (pro $a = b$ je totiž roven nule). Dělením zjistíme, že výsledný mnohočlen třetího stupně má opět stejnou vlastnost, takže po opakovaném dělení převedeme zkoumanou rovnici do součinového tvaru

$$(a - b)^2(15a^2 + 14ab + 15b^2) = 0.$$

Poslední rovnost platí, právě když $a = b$, protože $15a^2 + 14ab + 15b^2 > 0$ pro každou dvojici reálných čísel a, b.

V případě a) můžeme postupovat i následovně: Odečtením rovností

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

dostaneme

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Na obou stranách poslední rovnice jsou rozdíly druhých mocnin. Převedeme je na součiny a pak využijeme danou rovnost $a + t_a = b + t_b$ upravenou do tvaru $t_a - t_b = b - a$:

$$
\begin{aligned}
(t_a - t_b)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(b + a),\\
(b - a)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(a + b).
\end{aligned}
$$

Kdyby bylo $a \neq b$, vyjde $t_a + t_b = \frac{3}{4}(a + b)$; to spolu s rovností $t_a - t_b = b - a$ dává $t_a = \frac{7}{8}b - \frac{1}{8}a$, tedy $t_a < b$, což odporuje tomu, že t_a je přepona a b odvěsna téhož pravoúhlého trojúhelníku (obr. 3). Proto musí platit rovnost $a = b$.

b) Nechť např. a je přepona (je-li přepona b, stačí strany a, b v následujícím textu navzájem vyměnit). Potom z Thaletovy a Pythagorovy věty plyne

$$
t_a = \frac{a}{2}, \quad t_b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},
$$

a rovnost ze zadání má tedy tvar

$$
\frac{3a}{2} = b + \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.
$$

Protože přepona a je delší než odvěsna b, tedy $a > b$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$
\begin{aligned}
3a - 2b &= \sqrt{4a^2 - 3b^2},\\
9a^2 - 12ab + 4b^2 &= 4a^2 - 3b^2,\\
5a^2 - 12ab + 7b^2 &= 0,\\
(a - b)(5a - 7b) &= 0,\\
5a - 7b &= 0.
\end{aligned}
$$

Závěr: Rovnost $a + t_a = b + t_b$ platí pro pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami $a = b$ a pro pravoúhlé trojúhelníky, které mají strany v poměru $5 : \sqrt{24} : 7$, a přitom nejkratší z nich je (třetí) strana c.

Návodné a podobné úlohy:

1. Dokažte, že těžnice obecného trojúhelníku (ať je pravoúhlý či nikoliv) mají stejnou vlastnost jako jeho výšky: ke kratší straně směřuje delší těžnice. Odvoďte odtud, že rovnost $a + t_b = b + t_a$ platí, právě když $a = b$. [Nerovnosti mezi stranami a, b a mezi částmi těžnic $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ porovnejte na základě toho, že vrchol C i těžiště T trojúhelníku ABC leží ve stejné polorovině vyťaté osou strany AB.]
2. Vypočítejte délku těžnice t_b trojúhelníku ABC, platí-li $a = 96$, $b = 144$, $t_a = 107$. [Dokažte, že v každém trojúhelníku platí $t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$.]
3. V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB, pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový. [56–B–I–4]

5. *Určete všechny dvojice a, b reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic*

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný.

Řešení. Ze zadání vyplývá, že $a \neq 0$, $b \neq 0$ (rovnice by nebyly kvadratické) a $a \neq b$ (rovnice by byly totožné, a pokud by měly dva reálné kořeny, byly by oba společné).

Označme x_0 společný kořen obou rovnic, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme $(a-b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a-b)(x_0-2) = 0$. Protože $a \neq b$ a 0 zřejmě kořenem daných rovnic není, musí být společným kořenem číslo $x_0 = 2$. Dosazením do daných rovnic tak dostaneme jedinou podmínku $4a + 4b + 1 = 0$, neboli

$$b = -a - \frac{1}{4}.$$

Diskriminant druhé z daných rovnic je pak $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, takže rovnice má dva různé reálné kořeny pro libovolné $a \neq -\frac{1}{2}$. Podobně diskriminant první z daných rovnic je $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2$. Rovnice má tedy dva různé reálné kořeny pro libovolné $b \neq -\frac{1}{2}$ neboli $a \neq \frac{1}{4}$.

Z uvedených předpokladů však zároveň plyne, že musí být $a \neq -\frac{1}{4}$ ($b \neq 0$) a $a \neq -\frac{1}{8}$ ($a \neq b$).

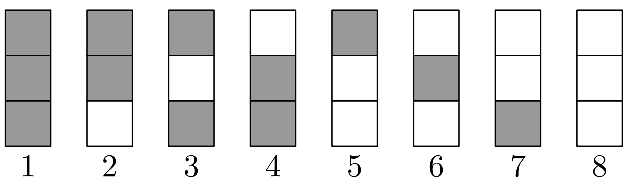
Závěr: Vyhovují všechny dvojice $(a, -a - \frac{1}{4})$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$.

Návodné a podobné úlohy:

1. Najděte společné kořeny rovnic $2x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$ a $2x^3 + 7x^2 + 2x - 6 = 0$. [$-1 \pm \sqrt{2}$, společný kořen je kořenem kvadratické rovnice, kterou dostaneme odečtením kubických rovnic.]
2. Zjistěte, pro které hodnoty parametru a mají rovnice $x^2 + ax - 3 = 0$ a $x^2 + 3x - a = 0$ aspoň jeden společný kořen. [$a = 3$, $a = -2$]
3. Najděte všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž má každá z rovnic $x^2 + (a-2)x + b - 3 = 0$, $x^2 + (a+2)x + 3b - 5 = 0$ dvojnásobný kořen. [$(6, 7)$, $(2, 3)$]

6. *Obdélník $2\,005 \times 2\,007$ je rozdělen na černé a bílé jednotkové čtverečky. Dokažte, že pak pro jednu z barev (černou nebo bílou) existuje více než $95\,800$ pravoúhelníků (složených z jednotkových čtverečků), jež se navzájem nepřekrývají a jejichž rohová políčka mají vesměs zvolenou barvu, přičemž každá z jejich stran obsahuje aspoň dva čtverečky.*

Řešení. Budeme hledat obdélník co nejmenšího obsahu, v němž musí být obsažen pravoúhelník, který má všechna rohová políčka stejné barvy. Šířka 2 nestačí (při libovolné délce by například mohl být jeden celý řádek černý a druhý bílý). Uvažujme tedy obdélník šířky 3. Jeho sloupce mohou být obarveny osmi způsoby:



Obr. 4

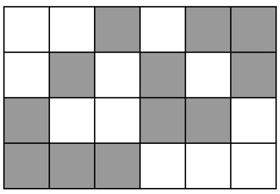
Je-li obdélník složen jen ze šesti sloupců 2 až 7, nemá žádný pravoúhelník s rozměry většími než 1 v něm obsažený všechna rohová políčka téže barvy. Uvedených šest sloupců totiž představuje všechny možnosti, jak obarvit sloupec složený ze tří políček dvěma barvami, aby nebyl jednobarevný (jednobarevné jsou pak zbývající dva sloupce 1 a 8). Kdyby v takovém obdélníku existoval pravoúhelník s rohovými políčky téže barvy, byly by příslušné sloupce stejné.

Má-li však obdélník šířky 3 délku aspoň 7, jsou v něm buď dva stejné sloupce, nebo v něm je některý z jednobarevných sloupců (1 a 8). V případě dvou stejných sloupců je existence pravoúhelníku se stejně obarvenými rohovými políčky zřejmá. Nejsou-li žádné dva sloupce stejné, ale je tam jednobarevný sloupec barvy A, musí v obdélníku být i sloupec, jehož dvě políčka mají barvu A. Tento sloupec a jednobarevný sloupec barvy A vymezují pravoúhelník, jehož všechna rohová políčka mají barvu A.

Daný obdélník $2\,005 \times 2\,007$ nyní rozdělíme na dvě části $2\,002 \times 2\,007$ a $3 \times 2\,007$. Protože $2\,002 = 7 \cdot 286$, $2\,007 = 3 \cdot 669$, skládá se první část z $286 \cdot 669$ nepřekrývajících se obdélníků 7×3. V druhé části je ještě dalších 286 obdélníků 7×3. Obdélníků 7×3 je tedy celkem $286 \cdot 669 + 286 = 286 \cdot 670 = 191\,620$. V každém z nich je obsažen aspoň jeden pravoúhelník, který má všechna rohová políčka stejné barvy. Pro nejméně polovinu takto nalezených obdélníků, tedy pro alespoň 95 810 je pak barva rohových polí stejná.

Návodné a podobné úlohy:

1. Obdélník 6×4 je rozdělen na 24 jednotkových čtverečků. Každý z nich obarvěte černou nebo bílou barvou tak, aby žádné čtyři stejně zbarvené čtverečky nebyly rohovými čtverečky téhož pravoúhelníku (najděte aspoň jedno řešení). [Viz obrázek: vzhledem k jeho „barevné souměrnosti“ stačí ověřit neexistenci pravoúhelníku jen pro jednu barvu rohových polí.]



2. Obdélník 3×7 je rozdělen na 21 jednotkových čtverců, z nichž každý je obarven bílou nebo černou barvou. Dokažte, že některé čtyři stejně zbarvené čtverce jsou rohovými čtverci téhož pravoúhelníku. [Viz řešení soutěžní úlohy.]
3. Obdélník 6×4 je rozdělen na 24 jednotkových čtverců. Třináct z nich je obarveno černou barvou. Dokažte, že některé čtyři černé čtverce jsou rohovými čtverci téhož pravoúhelníku. [Aspoň jeden ze šesti sloupců musí obsahovat aspoň tři černé čtverce. Jsou-li dokonce čtyři, máme pro umístění zbývajících devíti čtverců pět sloupců, takže v jednom z nich musejí být aspoň dva. Jsou-li právě tři, buď existuje aspoň jeden další sloupec se třemi černými čtverci (v těchto dvou sloupcích už požadovaný pravoúhelník najdeme), anebo v každém ze zbylých pěti sloupců jsou právě dva černé čtverce; je jen $\binom{4}{2} = 6$ možností, jak čtyři čtverce ve sloupci takto obarvit, přičemž tři z nich už dávají požadovaný pravoúhelník s původně nalezenými třemi černými čtverci ve sloupci.]