57. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c s vlastností: Každá z rovnic*

$$x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) = 0, \tag{1}$$
$$x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) = 0, \tag{2}$$
$$x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) = 0 \tag{3}$$

má v oboru reálných čísel tři různé kořeny, celkem je to však pouze pět různých čísel.

Řešení. Předpokládejme, že čísla a, b, c mají požadovanou vlastnost. Všimneme si nejdříve, že každé dvě z daných rovnic musejí mít společný kořen, jinak by měly dohromady šest různých kořenů.

Společné kořeny dvou z daných tří kubických rovnic jsou kořeny kvadratických rovnic, které dostaneme jejich odečtením. Vypišme všechny tři „rozdílové" rovnice, které nezávisejí na parametrech a, b, c (to je řešitelsky pozitivní zjištění), a rozložme rovnou jejich levé strany na kořenové činitele:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0, \tag{2–1}$$
$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0, \tag{3–1}$$
$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = 0. \tag{3–2}$$

Vidíme, že rovnice (1) a (2) mají jediný společný kořen $x = 1$, takže mají dohromady právě pět různých kořenů. Proto musí být každý z kořenů rovnice (3) kořenem aspoň jedné z rovnic (1) nebo (2). Z uvedených rozkladů plyne, že číslo $x = 1$ je rovněž kořenem rovnice (3).

Vysvětleme, proč ostatní dva kořeny rovnice (3) nemohou být zároveň i kořeny jedné z rovnic (1) nebo (2). V opačném případě by jedna z rovnic (1), (2) měla s rovnicí (3) stejnou trojici kořenů, a proto by musely mít stejné koeficienty nejen u kubického členu. To však neplatí, neboť pro libovolnou hodnotu parametru c jsou čísla $c+1$, $c+2$, $c+3$ (tj. absolutní členy rovnic) vesměs různá.

Rovnice (3) má tedy kromě kořenu $x = 1$ ještě jeden společný kořen s rovnicí (1) a jeden společný kořen s rovnicí (2); podle rozkladů (3–1) a (3–2) vidíme, že se jedná o čísla $x = -\frac{1}{2}$ a $x = -2$. Levá strana rovnice (3) má proto rozklad

$$(x-1)(x+2)\Big(x + \frac{1}{2}\Big) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

Odtud porovnáním s koeficienty zapsanými v (3) již dostaneme $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{7}{2}, c = -2$.

Z našeho postupu plyne, že pro nalezené hodnoty a, b, c má rovnice (3) trojici kořenů $1, -\frac{1}{2}$ a -2, že čísla $1, -\frac{1}{2}$ jsou kořeny rovnice (1) a že čísla $1, -2$ jsou kořeny rovnice (2). Musíme se ještě přesvědčit, že třetí kořeny rovnic (1) a (2) jsou další dvě (různá) čísla.

Tyto třetí kořeny můžeme výhodně najít pomocí Viètových vztahů. Protože součin tří kořenů rovnice (1) je číslo opačné k absolutnímu členu $c+2$ rovnému nule, je číslo nula třetí kořen rovnice (1). Podobně součin tří kořenů rovnice (2) je roven -1, takže třetí kořen je číslo $x=\frac{1}{2}$.

Závěr. Jediným řešením úlohy jsou čísla $a=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{7}{2}$, $c=-2$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte (pokud existují) všechny společné kořeny kubických rovnic

$$x^3+(2\sqrt{2}-1)x^2-(9\sqrt{2}+10)x+10\sqrt{2}+16=0,$$
$$x^3+(2\sqrt{2}-3)x^2+(\sqrt{2}-6)x-10\sqrt{2}+16=0.$$

[Společné kořeny musejí vyhovovat kvadratické rovnici $x^2-(5\sqrt{2}+2)x+10\sqrt{2}=0$, kterou dostaneme, když dané rovnice od sebe odečteme a výsledek vydělíme dvěma. Tato rovnice má diskriminant $54-20\sqrt{2}$ rovný $(5\sqrt{2}-2)^2$, takže její kořeny jsou čísla 2 a $5\sqrt{2}$. Dosazením se přesvědčíme, že společný kořen je pouze číslo 2. Na procvičení je možné dopočítat i zbylé kořeny daných kubických rovnic po snížení jejich stupně obvyklou metodou vydělení kořenovým činitelem (v našem případě rovným $x-2$). U první z nich to jsou čísla $\sqrt{2}+1$ a $-2-3\sqrt{2}$, u druhé čísla $\sqrt{2}-1$ a $2-3\sqrt{2}$. Náročnějším místem výpočtů je odmocňování diskriminantů tvaru $a+b\sqrt{2}$ cestou řešení rovnice $a+b\sqrt{2}=(u+v\sqrt{2})^2$ s neznámými celými čísly u, v.]

N2. Zjistěte, pro které reálné číslo p mají rovnice

$$x^3+x^2-36x-p=0,$$
$$x^3-2x^2-px+2p=0$$

společný kořen v oboru reálných čísel. [52–A–S–3]

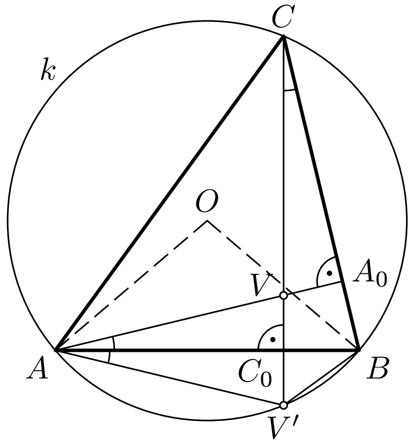
D1. Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava

$$x^2y-2x=p,$$
$$y^2x-2y=2p-p^2$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel. [B–51–I–5]

2. *V rovině je dána úsečka AV a ostrý úhel velikosti α. Určete množinu středů kružnic opsaných všem těm trojúhelníkům ABC s vnitřním úhlem α při vrcholu A, jejichž výšky se protínají v bodě V.*

ŘEŠENÍ. Nejprve dokažme jedno obecně užitečné tvrzení o průsečíku V výšek libovolného ostroúhlého trojúhelníku ABC. Označme V' průsečík přímky obsahující výšku CC_0 s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky C_0VA



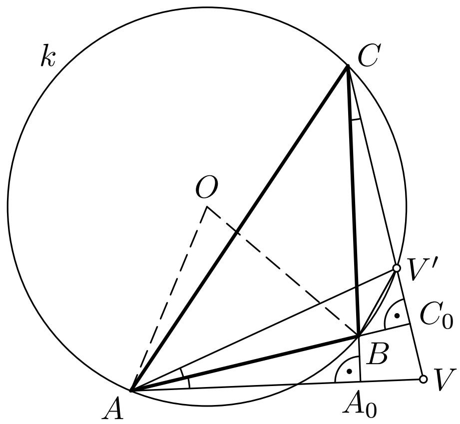
Obr. 1

a A_0VC jsou podobné (shodují se ještě v úhlu při vrcholu V), proto $|\sphericalangle BAA_0| = |\sphericalangle BCC_0|$. Úhly BCC_0 a $V'AB$ jsou shodné obvodové úhly nad obloukem $V'B$, takže *body V a V' jsou souměrně sdruženy podle přímky AB.*

Označíme-li úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem, bude $|\sphericalangle ACV'| = |\sphericalangle ACC_0| = 90° - \alpha$, takže pro délku úsečky AV díky uvedené souměrnosti dostaneme

$$|AV| = |AV'| = 2r\sin(90° - \alpha) = 2r\cos\alpha, \tag{1}$$

kde r je velikost poloměru kružnice k opsané trojúhelníku ABC (a zároveň i trojúhelníku $AV'C$). Stejný vzorec (1) platí pro trojúhelník ABC s ostrým vnitřním úhlem α při vrcholu A i v případě, kdy jeden z ostatních dvou vnitřních úhlů (např. u vrcholu B) je pravý nebo tupý (obr. 2). Celou úvahu můžeme zopakovat slovo od slova.



Obr. 2

Nyní se už pustíme do řešení soutěžní úlohy se zadanými body A, V a danou velikostí ostrého úhlu α. Vzorec (1) nás přivádí k závěru, že kružnice opsané všem uvažovaným trojúhelníkům ABC budou mít týž poloměr

$$r = \frac{|AV|}{2\cos\alpha}, \tag{2}$$

tudíž jejich středy O budou mít od daného bodu A pevnou, právě určenou vzdálenost r. Je ovšem zapotřebí určit, jakou část kružnice $l(A, r)$ středy O vyplní; jistě to bude množina souměrná podle přímky AV, neboť souměrnost s osou AV převádí vyhovující trojúhelník na vyhovující trojúhelník. S tímto cílem vyjádříme velikost úhlu VAO pomocí vnitřních úhlů $\beta = |\sphericalangle ABC|$ a $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Budeme přitom předpokládat, že platí $\beta \geqq \gamma$ (v opačném případě lze od samého počátku označení vrcholů B, C navzájem vyměnit).

Předpokládejme nejprve, že $\beta < 90°$, takže trojúhelník ABC je ostroúhlý a můžeme opět pracovat s obr. 1. Z rovnoramenného trojúhelníku ABO s vnitřním úhlem 2γ při hlavním vrcholu O vidíme, že $|\sphericalangle BAO| = 90° - \gamma$, z pravoúhlého trojúhelníku BAA_0 zase plyne $|\sphericalangle BAV| = 90° - \beta$. Vzhledem k tomu, že oba body O, V leží v polorovině ABC, dostáváme pro úhel VAO vyjádření

$$|\sphericalangle VAO| = |\sphericalangle BAO| - |\sphericalangle BAV| = (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta - \gamma$$

(připomeňme, že $\beta \geqq \gamma$).

V případě $\beta \geqq 90^\circ$ podle obr. 2 podobně zjistíme, že $|\sphericalangle BAO| = 90^\circ - \gamma$ a $|\sphericalangle BAV| = \beta - 90^\circ$, tudíž

$$|\sphericalangle VAO| = |\sphericalangle BAO| + |\sphericalangle BAV| = (90^\circ - \gamma) + (\beta - 90^\circ) = \beta - \gamma.$$

Vidíme, že $|\sphericalangle VAO| = \beta - \gamma$ bez ohledu na to, zda je trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý nebo tupoúhlý.

Nyní už snadno dokončíme řešení úlohy: z odvozené velikosti úhlu VAO plyne odhad

$$|\sphericalangle VAO| = \beta - \gamma < \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

takže bod O leží uvnitř oblouku kružnice $l(A, r)$ určeného nerovností

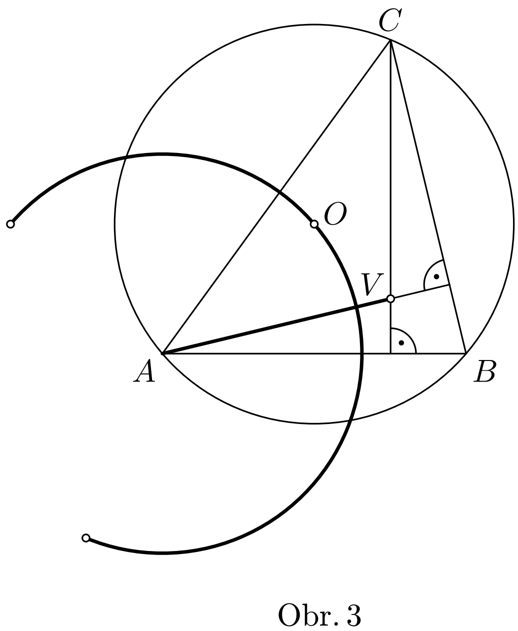
$$|\sphericalangle VAO| < 180^\circ - \alpha.$$

Zvolíme-li naopak úhel ε, $0^\circ \leqq \varepsilon < 180^\circ - \alpha$, snadno vypočteme, jakou velikost musí mít vnitřní úhly β a γ, aby platilo $|\sphericalangle VAO| = \varepsilon$:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha + \varepsilon}{2}, \quad \gamma = \frac{180^\circ - \alpha - \varepsilon}{2}.$$

Vepíšeme-li tedy do jakékoliv kružnice o poloměru r ze vzorce (2) pomocný trojúhelník $A'B'C'$ s daným úhlem α při vrcholu A' a vypočtenými úhly β, γ při vrcholech B', resp. C', pro jeho ortocentrum V' a střed O' opsané kružnice budou splněny rovnosti $|A'V'| = |AV|$ a $|\sphericalangle V'A'O'| = \varepsilon$. Ve shodném zobrazení, které převede úsečku $A'V'$ na úsečku AV, pak trojúhelník $A'B'C'$ přejde ve vyhovující trojúhelník ABC, jehož střed O opsané kružnice bude ležet na kružnici l a vyhovovat rovnosti $|\sphericalangle V'A'O'| = \varepsilon$.

Závěr. Hledanou množinou středů O opsaných kružnic je oblouk kružnice o středu A a poloměru $r = \frac{1}{2}|AV| / \cos\alpha$ určený nerovností $|\sphericalangle VAO| < 180^\circ - \alpha$ (krajní body tohoto oblouku tedy do výsledné množiny nepatří, obr. 3).



Obr. 3

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Ukažte, že dvě přímky, na nichž leží osy vnitřních úhlů (resp. výšky, resp. spojnice vrcholů se středem kružnice opsané) trojúhelníku, svírají úhel, jehož velikost závisí pouze na velikosti vnitřního úhlu při zbývajícím vrcholu. Platí takové tvrzení i pro přímky, na kterých leží těžnice trojúhelníku?

N2. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek podle přímek, na kterých leží strany ostroúhlého trojúhelníku, leží na kružnici trojúhelníku opsané. [Viz řešení soutěžní úlohy.] Odvoďte odtud zajímavé tvrzení o třech kružnicích, které jsou obrazy opsané kružnice ve zmíněných třech osových souměrnostech. [Tyto tři kružnice procházejí jedním bodem, totiž průsečíkem výšek.]

N3. Vyjádřete vzdálenosti průsečíku výšek ostroúhlého trojúhelníku od jeho vrcholů kosinů jeho vnitřních úhlů a poloměru kružnice opsané. [Viz řešení soutěžní úlohy.]

D1. Ukažte, že z úlohy N2 plyne stejné tvrzení i pro tupoúhlý trojúhelník pomocí takové úvahy: je-li V průsečík výšek trojúhelníku ABC s tupým úhlem při vrcholu C, je bod C průsečíkem výšek ostroúhlého trojúhelníku ABV.

3. *Množinu* M *tvoří* $2n$ *různých kladných reálných čísel, kde* $n \geqq 2$. *Uvažujme* n *obdélníků, jejichž rozměry jsou čísla z* M, *přičemž každý prvek z* M *je použit právě jednou. Určete, jaké rozměry mají tyto obdélníky, je-li součet jejich obsahů*
a) největší možný; b) nejmenší možný.

ŘEŠENÍ. Věnujme se nejdříve nejjednodušší situaci, kdy $n = 2$. Danou množinu M tak tvoří čtyři kladná čísla, která označíme podle velikosti

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Máme pouze tři možnosti, jak požadovaným způsobem sestavit dvojici obdélníků. Vypišme na třech řádcích jejich rozměry:

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \quad &\text{a} \quad a_3 \times a_4,\\ a_1 \times a_3 \quad &\text{a} \quad a_2 \times a_4,\\ a_1 \times a_4 \quad &\text{a} \quad a_2 \times a_3, \end{aligned}$$

a ukažme, že součty obsahů těchto obdélníků jsou v uvedeném pořadí klesající, tj. že platí

$$a_1a_2 + a_3a_4 > a_1a_3 + a_2a_4 > a_1a_4 + a_2a_3. \tag{1}$$

Místo dvou snadných důkazů (proveďte sami) poznamenejme, že obě nerovnosti jsou téhož typu a lze je zdůvodnit obecným pravidlem

$$a < b,\ c < d \quad \Longrightarrow \quad ac + bd > ad + bc, \tag{2}$$

jež platí pro libovolnou čtveřici reálných čísel a, b, c, d díky rovnosti

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (b - a)(d - c).$$

Skutečně, levou nerovnost z (1) dostaneme z pravidla (2) volbou

$$a = a_1, \quad b = a_4, \quad c = a_2, \quad d = a_3 \quad (\text{platí } a_1 < a_4 \text{ a } a_2 < a_3),$$

pravou nerovnost pak volbou

$$a = a_1, \quad b = a_2, \quad c = a_3, \quad d = a_4 \quad (\text{platí } a_1 < a_2 \text{ a } a_3 < a_4).$$

Tím je úloha v případě $n = 2$ vyřešena. Tato zkušenost nás jistě přivede k odhadu výsledku pro obecné $n \geqq 2$:

Jsou-li $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ prvky dané množiny M, pak největší sumární obsah má jediná n-tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_2, a_3 \times a_4, \ldots, a_{2n-1} \times a_{2n}$; nejmenší sumární obsah má jediná n-tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_{2n}, a_2 \times a_{2n-1}, \ldots, a_n \times a_{n+1}$.

K důkazu prvního závěru předpokládejme, že vyhovující n-tice obdélníků je sestavena tak, že čísla a_1, a_2 nejsou rozměry téhož obdélníku. Pak v takové n-tici jsou obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_2 \times a_j$, kde $i, j > 2$. Zaměňme je obdélníky $a_1 \times a_2$ a $a_i \times a_j$. Dostaneme (jinou) vyhovující n-tici obdélníků, která bude mít oproti původní n-tici větší sumární obsah, neboť platí

$$a_1a_2 + a_ia_j > a_1a_i + a_2a_j,$$

a to opět díky pravidlu (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_2 < a_i$. Z této úvahy plyne: největší sumární obsah může mít jen taková n-tice uvažovaných obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_2$. Tento obdélník můžeme tedy dát stranou a uvažovat úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n-2$ prvcích $a_3 < a_4 < \ldots < a_{2n}$. Opakováním předchozího postupu vytvoříme obdélník $a_3 \times a_4$ a provedeme další redukci množiny atd. (formálně můžeme využít matematickou indukci). Hypotéza o soustavě obdélníků s největším sumárním obsahem je tak dokázána.

Zcela obdobně dokážeme závěr o soustavě s nejmenším sumárním obsahem. Nejsou-li a_1, a_{2n} rozměry téhož obdélníku, jsou mezi uvažovanými obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_j \times a_{2n}$ (kde $1 < i, j < 2n$), které zaměníme obdélníky $a_1 \times a_{2n}$ a $a_i \times a_j$, čímž se sumární obsah obdélníků zmenší, neboť platí

$$a_1a_i + a_ja_{2n} > a_1a_{2n} + a_ia_j.$$

podle pravidla (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_i < a_{2n}$. Nejmenší sumární obsah proto může mít jen taková vyhovující n-tice obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_{2n}$. Tento obdélník dáme stranou a uvažujeme úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n-2$ prvcích $a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n-1}$. Vše ostatní je už zbytečné opakovat.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte pravidlo (2) z řešení soutěžní úlohy. [Důkaz viz tamtéž.]

D1. Pravidlo (2) zmíněné v úloze N1 využijte k důkazu tzv. *permutačních nerovností*: Jsou-li $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ dvě n-tice reálných čísel a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jejich libovolné permutace, pak pro součet $S = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ platí $S_{\min} \leqq S \leqq S_{\max}$, kde $S_{\min} = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_n$ a $S_{\max} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. [Návod: Jako v řešení soutěžní úlohy ukažte, že součet S lze zvětšit, jsou-li mezi jeho sčítanci x_ky_k členy a_1b_i a a_jb_1, přičemž $a_j > a_1$ a $b_i > b_1$. Podobně lze součet S zmenšit v případě sčítanců a_1b_i a a_jb_n, pokud $a_j > a_1$ a $b_n > b_i$. Takových zvětšení (zmenšení) lze opakovaně provést jen konečně mnoho.]

D2. Permutační nerovnost z úlohy D1 využijte k důkazu nerovností

$$a^3b + b^3c + c^3a \leqq a^4 + b^4 + c^4 \quad \text{a} \quad \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqq a^2 + b^2 + c^2$$

pro libovolná kladná čísla a, b, c. [Je-li $p \leqq q \leqq r$ neklesající pořadí čísel a, b, c, je $p^3 \leqq q^3 \leqq r^3$ a $p^{-1} \geqq q^{-1} \geqq r^{-1}$.]

D3. Zachovejme předpoklady a označení z úlohy D2. Ukažte, že sečtením n vhodných permutačních nerovností lze odvodit tzv. *Čebyševovy nerovnosti*

$$n \cdot S_{\min} \leqq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqq n \cdot S_{\max}.$$

S jejich pomocí pak dokažte, že pro libovolná kladná a, b, c platí

$$(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \leqq 3(a^5+b^5+c^5) \leqq (a^7+b^7+c^7)(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}).$$

D4. Čísla od 1 do 2 000 byla rozdělena do 1 000 (disjunktních) dvojic (a_i, b_i) tak, že pro každé $i = 1, 2, \dots, 1\,000$ je rozdíl $|a_i - b_i|$ je roven jednomu z čísel 1 nebo 6. Určete, jakou číslicí končí desítkový zápis čísla

$$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_{1000} - b_{1000}|.$$

[Nulou. Platí $S = 1\,000 + 5p$, kde p je počet dvojic (a_i, b_i) s vlastností $|a_i - b_i| = 6$. Počet těch dvojic, v nichž jsou obě čísla lichá, se musí rovnat počtu těch dvojic, kde jsou obě sudá. Proto je číslo p sudé.]

D5. Pro dané přirozené $n \geqq 2$ rozdělme množinu $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ libovolným způsobem na dvě (disjunktní) n-prvkové množiny A a B. Prvky A označme v rostoucím pořadí jako $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, prvky B v klesajícím pořadí jako $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$. Najděte všechny možné hodnoty součtu

$$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

[Všechny součty mají tutéž hodnotu $(n+1)+(n+2)+\ldots+2n-(1+2+\ldots+n) = n^2$. Návod: Pro každé i je menší z čísel a_i, b_i menší než $n-i$ čísel z jedné množiny a i čísel z druhé množiny, což dohromady znamená, že je menší než některých n čísel z celé množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, musí proto ležet v množině $\{1, 2, \dots, n\}$. Podobně větší z čísel a_i, b_i musí ležet v množině $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$.]

4. *Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ všech možných délek k, pro které platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \dots, k-1$ a $a_k = 969\,969$.*

Řešení. Ze zadání úlohy plyne, že všechny členy uvažovaných posloupností budou děliteli jejich posledního členu, rovnému číslu 969 969. Najdeme proto nejprve rozklad tohoto čísla na prvočinitele:

$$969\,969 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19. \tag{1}$$

Nyní již snadno můžeme vytvářet příklady vyhovujících posloupností různých délek. Vypišme kupříkladu tu nejkratší, jednu z nejdelších a ještě jednu další:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) &= (1, 969\,969),\\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) &= (1, 13, 91, 1\,729, 5\,187, 57\,057, 969\,969),\\ (a_1, a_2, a_3, a_4) &= (1, 21, 4\,641, 88\,179, 969\,969).\end{aligned}$$

(Zkontrolujte uvedené příklady výpočtem podílů a_{i+1}/a_i pro všechna přípustná i).

Experimentováním s konkrétními posloupnostmi dojdeme k poznání jejich společných vlastností, které je plně charakterizují:

Libovolný člen a_i každé vyhovující posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_k$ je součinem několika (v případě $i = 1$ žádného, v případě $i = k$ všech) z šesti různých prvočísel z rozkladu (1), přitom (v případě $i < k$) člen a_{i+1} má kromě všech činitelů členu a_i ještě alespoň jednoho nového činitele navíc (posloupnost má být rostoucí!). Naopak, každá taková konečná posloupnost je vyhovující.

Z uvedeného vyplývá způsob, jak „úsporně“ zadat každou vyhovující posloupnost; stačí jen uvést, jak se noví činitelé postupně objevují, tj. zadat posloupnost podílů

$$\frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \frac{a_4}{a_3},\ \dots,\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}},\ \frac{a_k}{a_{k-1}}, \tag{2}$$

do jejichž rozkladů na prvočinitele je šest prvočísel z (1) rozděleno (v každém aspoň jedno). Proto je hledaný počet vyhovujících posloupností roven počtu rozdělení šesti daných prvočísel do jedné nebo několika *očíslovaných* neprázdných skupin (odpovídajících prvočinitelům podílů (2), takže na pořadí prvočísel ve skupině nezáleží). Slovo „očíslovaných" znamená, že na pořadí skupin záleží. Například pro rozdělení do dvou skupin $\{3, 11, 19\}$, $\{7, 13, 17\}$ dostaneme podle toho, v jakém pořadí obě skupiny vezmeme, dvě vyhovující posloupnosti $(1, u, uv)$ a $(1, v, uv)$, kde $u = 3 \cdot 11 \cdot 19$ a $v = 7 \cdot 13 \cdot 17$.

Dospěli jsme tak ke kombinatorické úloze určení hodnoty $P(6)$, kde $P(n)$ značí počet rozdělení n-prvkové množiny X do libovolného počtu očíslovaných neprázdných podmnožin X_1, X_2, X_3, … . Není schůdné hodnotu $P(6)$ vypočítat *přímo*, zato bude možné hodnoty $P(n)$ počítat *postupně* pro $n = 1$, $n = 2$, atd. až po potřebné $n = 6$. Takovému způsobu výpočtu říkáme *rekurentní*. V naší úloze bude výpočet založen na rekurentní rovnici

$$P(n) = \binom{n}{1}P(n-1) + \binom{n}{2}P(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1}P(1) + 1 \qquad (3)$$

platné pro každé $n \geqq 2$, jak nyní ukážeme.

Všechna uvažovaná rozdělení n-prvkové množiny X rozdělíme do n skupin podle počtu j prvků první podmnožiny X_1 $(1 \leqq j \leqq n)$. První podmnožinu X_1 o j prvcích lze vybrat právě $\binom{n}{j}$ způsoby, právě $P(n-j)$ způsoby pak lze zbylou množinu $X' = X \setminus X_1$ lze rozdělit na neprázdné očíslované podmnožiny X_2, X_3, X_4, … . (Platí to i v případě $j = n$, když položíme $P(0) = 1$, neboť už není co rozdělovat.) Podle pravidla součinu je proto počet všech rozdělení původní množiny X s první množinou X_1 o j-prvcích roven $\binom{n}{j}P(n-j)$. Tím je vzorec (3), na jehož pravé straně poslední člen 1 odpovídá hodnotě $j = n$, dokázán.

Ze zřejmé hodnoty $P(1) = 1$ vypočteme opakovaným užitím vzorce (3) další hodnoty $P(2) = 3$, $P(3) = 13$, $P(4) = 75$, $P(5) = 541$ a $P(6) = 4\,683$.

Závěr. Existuje právě 4 683 vyhovujících posloupností.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Kolika způsoby lze číslo 49 000 rozložit na součin dvou celých čísel větších než 1, když na pořadí činitelů nebereme ohled? [23 způsobů. Návod: číslo $49\,000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ má $(3+1)\cdot(3+1)\cdot(2+1) = 48$ dělitelů, z nichž můžeme utvořit 24 neuspořádaných dvojic $\{a, b\}$ s vlastností $ab = 49\,000$. Jedna z nich je nevyhovující dvojice $\{1, 49\,000\}$.]

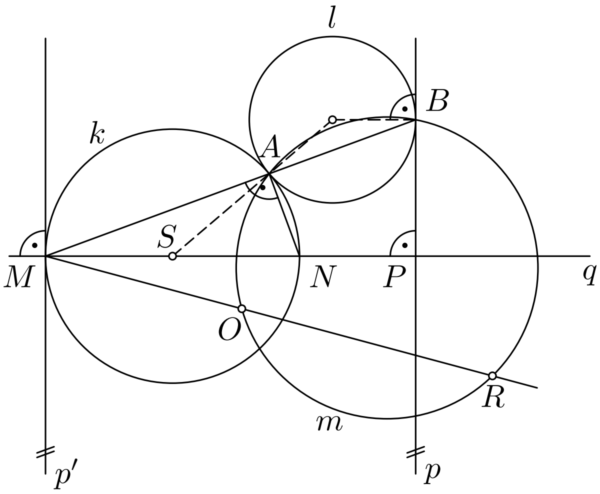
N2. Určete počet $P(n)$ způsobů, jak si rozdělit vánoční zásobu n stejných bonbonů k snězení během několika prvních dnů nového roku. (V každém z oné řady dnů musíme mít aspoň jeden bonbon. Je možné i takové „rozdělení", kdy všechny bonbony sníme na Nový rok.) Jak se změní odpověď, když každé dva z daných n bonbonů budou různé? [Pro případ stejných bonbonů platí $P(n) = 2^{n-1}$ podle pravidla součinu užitého k postupnému rozdělování bonbonů: první přidělíme na Nový rok a každý následující bonbon buď na stejný den jako bonbon předchozí, nebo na den následující. Pro případ různých bonbonů je situace složitější a vede na rekurentní rovnici (3) z řešení soutěžní úlohy.]

D1. Určete, kolik čísel můžeme vybrat z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 75\,599, 75\,600\}$ tak, aby mezi nimi bylo číslo 75 600 a aby pro libovolná dvě vybraná čísla a, b platilo, že a je dělitelem b nebo b dělitelem a. (Uveďte všechny možnosti.) [51–B–I–2]

D2. Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všechny její tříprvkové podmnožiny. Rozhodněte, zda je více těch, které mají součin svých prvků větší než 2006, nebo těch, které mají součin svých prvků menší než 2006. [56–A–S–2]

5. *Je dána kružnice k, bod O, který na ní neleží, a přímka p, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l, která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p. Příslušné body dotyku označme A a B. Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB. Dokažte, že všechny takové kružnice m procházejí společným bodem různým od bodu O, anebo se dotýkají téže přímky.*

Řešení. Jedna z vyhovujících kružnic l je znázorněna na obr. 4. Bod A vnějšího dotyku kružnic k, l je jejich (vnitřním) středem stejnolehlosti, v níž tečně p kružnice l odpovídá s ní rovnoběžná tečna p' kružnice k. Její bod dotyku M s kružnicí k leží na ose q kružnice k, která je kolmá na přímku p. Přitom ze dvou průsečíků M, N přímky q s kružnicí k je bod M ten vzdálenější od přímky p, neboť úsečka spojující stejnolehlé body dotyku M a B protíná kružnici k v bodě A (středu příslušné stejnolehlosti).



Obr. 4

Bod M tedy na volbě kružnice l nezávisí. Body $A \in k$ a $B \in p$ pochopitelně ano, ukažme však, že jejich vzájemná poloha na polopřímce s počátkem M je vázána podmínkou

$$|MA| \cdot |MB| = |MN| \cdot |MP|, \tag{1}$$

kde P je průsečík kolmic p a q. To jednoduše plyne z podobnosti

$$|MA| : |MN| = |MP| : |MB|$$

pravoúhlých trojúhelníků AMN, PMB. Vztah (1) lze rovněž zdůvodnit pomocí mocnosti bodu M ke kružnici sestrojené nad průměrem NB (jež prochází body P, A podle Thaletovy věty).

Teprve nyní vstoupí do našich úvah daný bod O. Na obr. 4 je kružnice l vybrána tak, že odpovídající přímka AB bodem O neprochází, takže existuje kružnice m opsaná trojúhelníku OAB. Podle zadání platí $O \notin k$, a tedy $O \neq M$, takže je určena polopřímka MO, která kromě bodu O bude mít s kružnicí m společný ještě jeden bod, který označíme R (v případě, kdy MO je tečna kružnice m, položíme $R = O$).[1] Dvojím

[1] Zdůrazněme, že vzhledem ke vzájemné poloze bodů M, A, B leží bod M ve vnější oblasti *každé* kružnice procházející body A, B, tedy i kružnice m. Polopřímka MO tedy má s kružnicí m, není-li její tečnou, společné skutečně dva různé body.

vyjádřením mocnosti bodu M ke kružnici m pak dostaneme

$$|MA| \cdot |MB| = |MO| \cdot |MR|,$$

odkud porovnáním s (1) zjistíme, že úsečka MR má délku

$$|MR| = \frac{|MN| \cdot |MP|}{|MO|},$$

která zřejmě nezávisí na volbě kružnice l. Protože bod R navíc leží na pevné polopřímce MO, je v případě $|MR| \neq |MO|$ bod R společným bodem všech kružnic m ($R \neq O$), v případě $|MR| = |MO|$ je přímka MO jejich společná tečna. Tím je řešení úlohy u konce.

Návodné a doplňující úlohy:

Zopakujte si nejdříve učebnicové poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic (zvlášť vyčleňte případ, kdy se kružnice dotýkají) a jejich rovnoběžných (speciálně společných) tečen. Připomeňte si rovněž vlastnost všech sečen dané kružnice jdoucích daných bodem, vyjádřenou mocností bodu ke kružnici.

N1. V rovině je dána kružnice k, přímka p a bod $B \in p$. Sestrojte kružnici l, která se dotýká jak kružnice k, tak přímky p, a to v bodě B. [Jedna ze známých tzv. *Pappových úloh.*]

D1. V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Společné tečny obou kružnic se dotýkají kružnice k_1 v bodech P a Q. Dokažte, že přímka PQ se dotýká kružnice k_2. [52–A–S–2]

D2. Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s. [49–B–I–2]

D3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné. [49–A–III–2]

6. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje celé číslo a, $1 < a < 5^n$, takové, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$.*

Řešení. Začneme poněkud obšírněji případem $n = 1$. Najdeme *všechna* celá čísla a s vlastností $5 \mid a^3 - a + 1$. Nejprve sestavíme tabulku hodnot $r^3 - r + 1$ pro všechny možné zbytky r při dělení pěti, tedy pro $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

r	0	1	2	3	4
$r^3 - r + 1$	1	1	7	25	61

Pro ostatní celá čísla a už hodnoty $a^3 - a + 1$ počítat nemusíme. Je-li totiž r zbytek čísla a při dělení pěti, tedy $a = 5q + r$ pro vhodné celé q, pak čísla $a^3 - a + 1$ a $r^3 - r + 1$ dávají při dělení pěti stejný zbytek, neboť jejich rozdíl

$$(a^3 - a + 1) - (r^3 - r + 1) = (a^3 - r^3) - (a - r) = (a - r)(a^2 + ar + r^2 - 1)$$

je dělitelný číslem $a-r=5q$, je tedy násobkem pěti.[2] Z uvedené tabulky vidíme, že pro celé a platí $5 \mid a^3-a+1$, právě když $a=5q+3$.

Zadanou úlohu vyřešíme tak, že indukcí vzhledem k číslu n dokážeme existenci celého čísla a_n z intervalu $(1,5^n)$, jež vyhovuje podmínce $5^n \mid a_n^3-a_n+1$. Pro $n=1$ podle prvního odstavce dokazované tvrzení splňuje (v intervalu $(1,5)$!) jediné číslo $a_1=3$.

V druhém indukčním kroku předpokládejme, že pro některé přirozené k známe číslo a_k z intervalu $(1,5^k)$ s vlastností $5^k \mid a_k^3-a_k+1$, a na základě znalosti a_k sestrojme vyhovující číslo a_{k+1}. Zbytkem čísla $a_k^3-a_k+1$ při dělení číslem 5^{k+1} musí být číslo dělitelné 5^k, tedy jedno z čísel

$$0,\ 5^k,\ 2\cdot 5^k,\ 3\cdot 5^k,\ 4\cdot 5^k.$$

Zapišme proto tento zbytek ve tvaru $r\cdot 5^k$, kde $r\in\{0,1,2,3,4\}$, a hledejme číslo a_{k+1} ve tvaru $a_{k+1}=a_k+s\cdot 5^k$ pro vhodné $s\in\{0,1,2,3,4\}$. (Je ihned jasné, že v případě $r=0$ můžeme vzít $a_{k+1}=a_k$, tedy $s=0$). I když hodnotu s vybereme až za chvíli, z podmínky $1<a_k<5^k$ a nerovností $a_k \leqq a_{k+1} \leqq a_k+4\cdot 5^k$ už nyní plyne, že podmínka $1<a_{k+1}<5^{k+1}$ bude splněna (ať dopadne výběr s jakkoliv). Pro číslo a_{k+1} zvoleného tvaru dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}^3-a_{k+1}+1}{5^{k+1}} &= \frac{\left(a_k+s\cdot 5^k\right)^3-\left(a_k+s\cdot 5^k\right)+1}{5^{k+1}} = \\ &= \frac{a_k^3+3a_k^2 s\cdot 5^k+3a_k s^2 5^{2k}+s^3 5^{3k}-a_k-s\cdot 5^k+1}{5^{k+1}} = \\ &= 3a_k s^2 5^{k-1}+s^3 5^{2k-1}+\frac{\left(a_k^3-a_k+1\right)-r\cdot 5^k}{5^{k+1}}+\frac{\left(3a_k^2-1\right)s+r}{5}.\end{aligned}$$

Hodnota posledního součtu bude celočíselná, budou-li takové oba závěrečné zlomky. První z nich tuto vlastnost má díky tomu, jak jsme zavedli číslo $r\in\{0,1,2,3,4\}$. Proto je zapotřebí jen najít takové $s\in\{0,1,2,3,4\}$, aby i druhý zlomek byl celočíselný, tedy aby číslo $\left(3a_k^2-1\right)s+r$ bylo dělitelné pěti. Jistě stačí ukázat, že pět čísel

$$c(s)=\left(3a_k^2-1\right)s+r, \quad \text{kde} \quad s\in\{0,1,2,3,4\},$$

dává při dělení pěti navzájem různé zbytky (jeden z nich pak bude nula). Kdyby tomu tak nebylo, platilo by $5 \mid c(s)-c(s')$ pro některá dvě různá $s,s'\in\{0,1,2,3,4\}$; z vyjádření

$$c(s)-c(s')=\left(3a_k^2-1\right)(s-s')$$

bychom pak usoudili, že číslo $3a_k^2-1$ je dělitelné pěti. Vztah $5 \mid 3a^2-1$ však neplatí pro žádné celé a; podle úvah z prvního odstavce se stačí o tom přesvědčit pro pět hodnot $a\in\{0,1,2,3,4\}$:

a	0	1	2	3	4
$3a^2-1$	-1	2	11	26	47

Tím je celý důkaz matematickou indukcí ukončen. Pro zajímavost dodejme, že jsme schopni snadno vysvětlit, že naše číslo $3a_k^2-1$ dává při dělení pěti vždy zbytek 1 (takže v případě $r\neq 0$ vyhovuje $s=5-r$). Skutečně, vzhledem k tomu, že $k\geqq 1$, z podmínky $5^k \mid a_k^3-a_k+1$ plyne $5 \mid a_k^3-a_k+1$, což je podle prvního odstavce splněno, právě když $a_k=5k+3$; číslo $3a_k^2-1$ tudíž při dělení pěti dává stejný zbytek jako číslo $3\cdot 3^2-1=26$.

[2] Stejně snadno se dokáže obecnější užitečný poznatek: pro libovolný mnohočlen F s celočíselnými koeficienty a libovolná celá a, b je rozdíl $F(a)-F(b)$ celočíselným násobkem rozdílu $a-b$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje celé číslo a takové, že platí $2^n \mid a^2 + 2\,007$. [Indukcí najdeme celé a_n s vlastností $2^n \mid a_n^2 + 2\,007$. Zřejmě vyhovuje $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, a máme-li pro některé $k \geqq 3$ vyhovující a_k, pak položíme buď $a_{k+1} = a_k$, nebo $a_{k+1} = a_k + 2^{k-1}$, podle toho, zda číslo $a_k^2 + 2\,007$ dává při dělení číslem 2^{k+1} zbytek 0, nebo zbytek 2^k (jiný zbytek podmínka $2^k \mid a_k^2 + 2\,007$ vylučuje). Ve druhém případě

$$\frac{a_{k+1}^2 + 2\,007}{2^{k+1}} = \frac{a_k^2 + 2\,007 - 2^k}{2^{k+1}} + \frac{a_k + 1}{2} + 2^{k-3},$$

což je celé číslo, neboť a_k je s ohledem na $2^k \mid a_k^2 + 2\,007$ nutně liché.]

D1. Číslo $1\,997^{2^n} - 1$ je dělitelné číslem 2^{n+2} pro každé přirozené číslo n. Dokažte. [47–A–I–1]

D2. Číslo $1\,997^{3^n} + 1$ je dělitelné číslem 3^{n+3} pro každé přirozené číslo n. Dokažte. [47–A–II–1]