56. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

1. *Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750?*

Řešení.

$$750 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Číslice 1, 2, 3 lze uspořádat šesti způsoby:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

Dále je třeba vložit do čísla ještě tři pětky. Číslice 1, 1, 6 lze uspořádat třemi způsoby: 116, 161, 611, dále je též třeba vložit tři pětky.

Možnosti:

a) Všechny pětky stojí u sebe. Trojici je možno dát před číslo, za první číslici, za druhou, za třetí, tj. 4 možné způsoby pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i pro každé uspořádání číslic 1, 1, 6. Získáme $4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 24 + 12 = 36$ možných šestimístných čísel.

b) Dvě pětky stojí u sebe, někde za nimi je zařazena třetí.

- ▷ Stojí-li dvojice před číslem, může třetí pětka stát za první číslicí nebo za druhou nebo za třetí, tj. pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i každé uspořádání číslic 1, 1, 6 jsou 3 možnosti, celkem $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27$.
- ▷ Nebo stojí dvojice 55 za první číslicí; třetí pětka může být umístěna za druhou nebo za třetí číslicí; pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i 1, 1, 6 jsou 2 možnosti, celkem $2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18$ možností.
- ▷ Nebo stojí dvojice 55 za druhou číslicí, třetí pětka bude stát na konci. Pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i 1, 1, 6 bude vždy jen jedna možnost, celkem $1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 6 + 3 = 9$.

Celkově bude $27 + 18 + 9 = 54$ možností.

c) Stejný počet možností získáme, zařazujeme-li napřed samotnou pětku, pak dvojici 55. Získáme opět 54 možností.

d) Poslední možnost je, že pětky budou stát osamoceně. Máme pro ně tyto možnosti zařazení: před první číslicí, za první číslicí, za druhou číslicí, za třetí číslicí. Protože umisťujeme jen 3 pětky, musíme vždy jednu z možností vynechat. (Tedy pětky budou stát: před 1. číslicí, za 1. číslicí, za 2. číslicí – nebo: před 1. číslicí, za 1. číslicí, za 3. číslicí – nebo: před 1., za 2., za 3. číslicí – nebo: za 1., za 2., za 3. číslicí). Pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i 1, 1, 6 máme 4 možnosti, celkem $4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 36$.

Závěr. Možných šestimístných čísel je $36 + 54 + 54 + 36 = 180$.

Poznámka. Možných uspořádání šesti číslic je 6!. Protože jsou tři stejné, počet se zmenšuje 3!krát, tedy $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 120$. Jsou-li mezi šesti číslicemi 2 a 3 stejné, je možný počet uspořádání $6! : (3! \cdot 2!) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! : (3! \cdot 2) = 60$. Celkem: $120 + 60 = 180$.

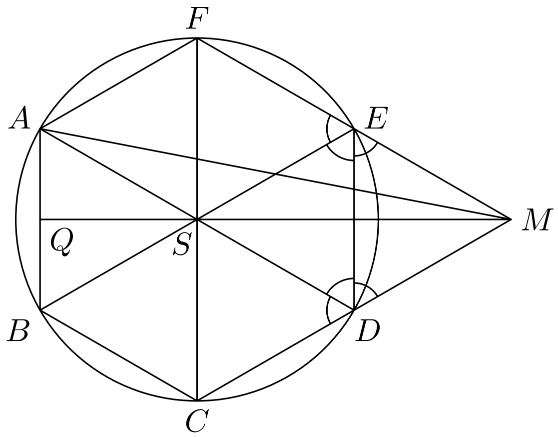
2. *Vyplňte správnými výrazy prázdná pole ve sčítací pyramidě na obrázku. Ve správně vyplněné sčítací pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součet výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním.*

	$\frac{1}{3} - 4x$	
$5x - 1$		$\frac{2}{3} - x$

Řešení. Prostřední spodní kámen označíme m. Ve druhé řadě dostaneme pro kameny $5x - 1 + m$, $\frac{2}{3} - x + m$, v nejvyšší řadě $4x - \frac{1}{3} + 2m = \frac{1}{3} - 4x$. Odtud $m = \frac{1}{3} - 4x$ a po dosazení získáme ve druhé řadě $x - \frac{2}{3}$, $1 - 5x$. Ověříme zkouškou, že v nejvyšší řadě skutečně získáme $\frac{1}{3} - 4x$.

3. *Do kružnice s poloměrem 2 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Přímky FE a CD se protínají v bodě M. Určete délku úsečky AM.*

Řešení. Střed kružnice označme S, střed strany AB označme Q. Trojúhelníky ABS, EDS a EDM jsou shodné (obr.). (Shodnost trojúhelníků EDS a EDM plyne



z poznatku, že všechny vyznačené úhly mají velikost 60° a že oba trojúhelníky mají společnou stranu ED.) $|QS|$ je délka výšek zmíněných trojúhelníků. Určíme ji podle Pythagorovy věty pro trojúhelník AQS.

$$|AS|^2 = |AQ|^2 + |QS|^2,$$
$$|QS| = \sqrt{|AS|^2 - |AQ|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Je zřejmé, že $|QM| = 3|QS| = 3\sqrt{3}$. Velikost úsečky AM určíme podle Pythagorovy věty pro trojúhelník AQM.

$$|AM|^2 = |AQ|^2 + |QM|^2,$$
$$|AM| = \sqrt{|AQ|^2 + |QM|^2} = \sqrt{1^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{28} \approx 5{,}3 \text{ (cm)}.$$

Délka úsečky AM je přibližně 5,3 cm.

4. *Matematické soutěže se zúčastnilo 142 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,9 bodu (zaokrouhleno na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,7 bodu (zaokrouhleno na desetiny). Kolik žáků mohlo odevzdat třetí úlohu? Uděloval se pouze celý počet bodů, za neodevzdanou úlohu bylo 0 bodů.*

Řešení. Nezaokrouhlený průměrný počet bodů počítaný vzhledem k počtu odevzdaných prací označme a. Nezaokrouhlený průměrný počet bodů počítaný vzhledem k počtu soutěžících označme b. Platí:

$$3{,}85 \leqq a < 3{,}95,$$
$$2{,}65 \leqq b < 2{,}75.$$

Za úlohu bylo uděleno celkem $142 \cdot b$ bodů, odevzdalo ji $142 \cdot b/a$ soutěžících. Podíl kladných čísel je co možná nejmenší, pokud je dělenec co nejmenší a dělitel co největší. Obdobně určíme i největší podíl. Pro počet odevzdaných úloh x platí:

$$\frac{142 \cdot 2{,}65}{3{,}95} < x < \frac{142 \cdot 2{,}75}{3{,}85}.$$

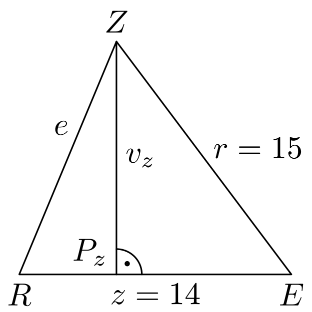
Je tedy přibližně

$$95{,}27 < x < 101{,}43.$$

Třetí úlohu mohlo odevzdat 96 až 101 soutěžících.

5. *Trojúhelník REZ s obsahem $84\,cm^2$ ($|RE| = 14\,cm$, $|ZE| = 15\,cm$) jsme dvěma přímými řezy rozdělili na tři části a z těch jsme složili (bez překrývání) obdélník. Jaké rozměry mohl obdélník mít? Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Nejprve určíme v trojúhelníku REZ délku zbývající strany a délky všech tří výšek. Výšku ke straně z určíme pomocí obsahu a strany z.



$$S = \frac{1}{2} z v_z,$$
$$v_z = \frac{2S}{z} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12 \text{ (cm)}.$$

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ZP_zE určíme délku P_zE (P_z je pata výšky ke straně z):

$$|ZE|^2 = |ZP_z|^2 + |P_zE|^2,$$
$$|P_zE| = \sqrt{|ZE|^2 - |ZP_z|^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ (cm)}.$$

Je zřejmé, že $|RP_z| = |RE| - |P_zE| = 14 - 9 = 5$. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník RP_zZ určíme délku RZ.

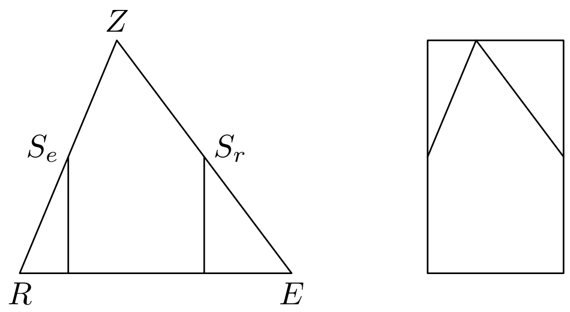
$$|RZ|^2 = |ZP_z|^2 + |RP_z|^2,$$
$$|RZ| = \sqrt{|ZP_z|^2 + |RP_z|^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (cm)}.$$

Stejným způsobem jako v prvním kroku řešení určíme i délky zbylých dvou výšek.

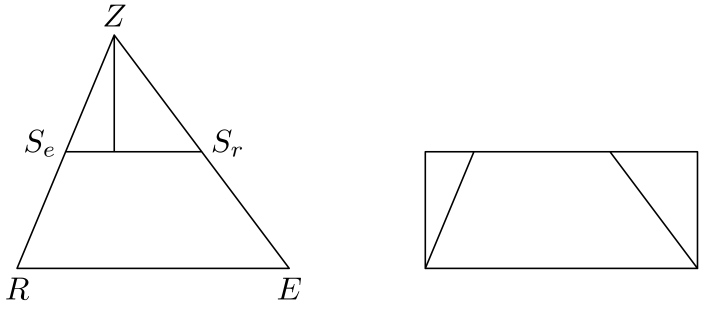
$$v_e = \frac{2S}{e} = \frac{2 \cdot 84}{13} = 12\frac{12}{13} \text{ (cm)},$$
$$v_r = \frac{2S}{e} = \frac{2 \cdot 84}{15} = 11{,}2 \text{ (cm)}.$$

Obdélník můžeme rozřezat více způsoby.

1) S_e a S_r jsou středy stran e a r. Řezy jsou kolmé ke straně z a procházejí body S_e a S_r. Vzniklý obdélník má rozměry $\frac{1}{2}z$ a v_z. Obdobným řezáním, avšak s použitím jiné středné než S_eS_r, získáme další dva různé obdélníky (s rozměry $\frac{1}{2}e$, v_e a $\frac{1}{2}r$, v_r).



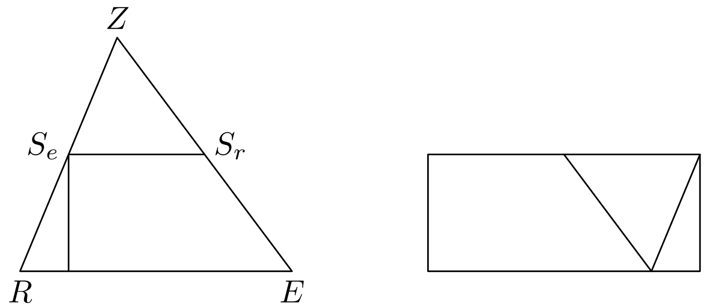
2) Jedním řezem je středná S_eS_r. Druhý řez je kolmý k této středné a prochází vrcholem Z. Vzniklý obdélník má rozměry z a $\frac{1}{2}v_z$. Obdobným řezáním, avšak s použitím jiné středné než S_eS_r, získáme další dva různé obdélníky (s rozměry e, $\frac{1}{2}v_e$ a r, $\frac{1}{2}v_r$).



Popsaným způsobem můžeme získat 6 různých obdélníků. Jejich rozměry v centimetrech jsou:

$$7 \times 12;\quad 6{,}5 \times 12\frac{12}{13};\quad 7{,}5 \times 11{,}2;\quad 14 \times 6;\quad 13 \times 6\frac{6}{13};\quad 15 \times 5{,}6.$$

Poznámka. Obdélníky uvedené v části 2 lze získat i pomocí jiných řezů (viz obrázek). Plným počtem bodů ohodnoťte i práce žáků, které neobsahují tento postřeh.



6. *Dokažte, že číslo*

$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2004 \cdot 2006)$$

je dělitelné číslem 2007^4.

Řešení. Číslo $2007 = 9 \cdot 223$. Budou-li oba sčítanci dělitelní $9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ a současně $223^4 = 223 \cdot 223 \cdot 223 \cdot 223$, bude součet dělitelný $2\,007^4$. V prvním sčítanci se vyskytují činitelé

$$9;\quad 3 \cdot 9 = 27;\quad 5 \cdot 9 = 45;\quad 7 \cdot 9 = 63$$

a dále

$$223;\quad 3 \cdot 223 = 669;\quad 5 \cdot 223 = 1115;\quad 7 \cdot 223 = 1561;$$

ve druhém sčítanci

$$2 \cdot 9 = 18;\quad 4 \cdot 9 = 36;\quad 6 \cdot 9 = 54;\quad 8 \cdot 9 = 72;$$

a dále

$$2 \cdot 223 = 446;\quad 4 \cdot 223 = 892;\quad 6 \cdot 223 = 1338;\quad 8 \cdot 223 = 1784.$$

Předpoklad je splněn, v obou sčítancích se vyskytují čtyřikrát činitelé 9 i 223, tedy daný výraz je dělitelný číslem $2\,007^4$.