56. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Určete všechny dvojice reálných čísel a a b, pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$.

2. V trojúhelníku ABC označme D střed strany BC, E střed strany AC a T těžiště. Je-li strana BC delší než strana AC, má kružnice vepsaná trojúhelníku BDT menší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku ATE. Dokažte.

3. Najděte nejmenší přirozené číslo n, pro které je podíl $\dfrac{n^2 + 15n}{33\,000}$ přirozené číslo.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 25. ledna 2007

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

56. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Vydělením mnohočlenu x^4+ax^2+b mnohočlenem x^2+bx+a zjistíme, že

$$x^4+ax^2+b=(x^2+bx+a)(x^2-bx+b^2)+(ab-b^3)x+(b-ab^2).$$

Mnohočlen x^4+ax^2+b je dělitelný mnohočlenem x^2+bx+a, právě když je zbytek $(ab-b^3)x+(b-ab^2)$ nulový mnohočlen, tedy $ab-b^3=b(a-b^2)=0$ a současně $b-ab^2=$ $=b(1-ab)=0$. Je-li $b=0$, jsou obě podmínky splněny. Pro $b\neq 0$ musí platit $a-b^2=0$ a $1-ab=0$. Odtud $a=b^2$, $1-b^3=0$, a tedy $a=b=1$.

Závěr. Mnohočlen x^4+ax^2+b je dělitelný mnohočlenem x^2+bx+a právě tehdy, je-li $b=0$ (a a libovolné) nebo $a=b=1$.

Jiné řešení. Mnohočlen x^4+ax^2+b je dělitelný mnohočlenem x^2+bx+a, právě když existují taková reálná čísla p, q, že $x^4+ax^2+b=(x^2+bx+a)(x^2+px+q)$. Roznásobením a porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

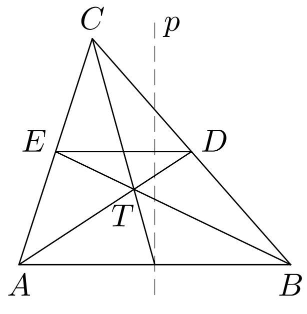
$$p+b=0,\quad q+bp+a=a,\quad ap+bq=0,\quad aq=b.$$

Z první rovnice vyjádříme $p=-b$ a z druhé $q=-bp=b^2$, dosazením do třetí a čtvrté máme $-ab+b^3=0$, $ab^2=b$. Řešení dokončíme stejně jako v předchozím případě.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za správné nalezení zbytku při dělení dejte 2 body. Další 2 body za soustavu rovnic $ab-b^3=0$, $b-ab^2=0$ a 2 body za její vyřešení. Podobně udělte 2 body za rovnici $x^4+ax^2+b=(x^2+bx+a)(x^2+px+q)$, 2 body za soustavu $p+b=0$, $q+bp+a=a$, $ap+bq=0$, $aq=b$ a 2 body za její vyřešení. Za uhodnutí řešení $b=0$ dejte jeden bod.

2. Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku je podílem jeho obsahu a polovičního obvodu.

Trojúhelníky ADE a BDE mají zřejmě stejný obsah, protože mají společnou stranu DE a shodnou výšku na ni (AB je rovnoběžné s DE). Stejný obsah tedy mají i trojúhelníky ATE a BDT, protože obsahy obou trojúhelníků se od obsahu zmíněných trojúhelníků liší právě o obsah „společného“ trojúhelníku DET (obr. 1).



Obr. 1

Označme p osu úsečky AB. Je-li strana BC delší než strana AC, leží bod C v téže polorovině s hraniční přímkou p jako bod A. Proto v této polorovině leží i těžiště T. Jeho vzdálenost od bodu A rovná $\frac{2}{3}t_a$ je tedy menší než jeho vzdálenost od bodu B rovná $\frac{2}{3}t_b$. To znamená, že $t_a < t_b$. Trojúhelník ATE má obvod $o_1 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_b + \frac{2}{3}t_a$, trojúhelník BDT má obvod $o_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b$. Z nerovností $b < a$ a $t_a < t_b$ proto vyplývá

$$o_2 - o_1 = \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{3}(t_b - t_a) > 0,$$

neboli $o_1 < o_2$.

Trojúhelníky AET a BDT mají stejný obsah a první z nich má menší obvod, proto má kružnice vepsaná trojúhelníku AET větší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku BDT.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. 1 bod udělte za vyjádření poloměru vepsané kružnice pomocí obsahu a obvodu trojúhelníku, 2 body za důkaz rovnosti obsahů trojúhelníků AET a BDT, 2 body za důkaz nerovnosti $o_1 < o_2$ a 1 bod za odvození nerovnosti mezi poloměry.

3. Číslo $n^2 + 15n = n(n+15)$ má být dělitelné číslem $33\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$. Kdyby nebylo n dělitelné třemi, nebylo by třemi dělitelné ani číslo $n + 15$, a tedy ani součin $n(n + 15)$. Ze stejného důvodu musí být n dělitelné pěti, a tedy i patnácti. Pišme proto $n = 15k$. Aby bylo číslo $n(n + 15) = 15^2k(k + 1)$ dělitelné číslem $8 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$, musí být součin $k(k + 1)$ dvou po sobě jdoucích přirozených čísel dělitelný osmi, pěti a jedenácti. Jeden z činitelů k, $k + 1$ musí být dělitelný aspoň dvěma z těchto tří čísel, takže musí být dělitelný některým z čísel 40, 55, 88. Nejmenším takovým číslem je 40. Jedenácti však není dělitelné ani číslo 40, ani žádný z jeho sousedů 39, 41. Dalším kandidátem je číslo 55, součin čísel 5 a 11. Je dělitelný osmi některý z jeho sousedů? Ano, větší z nich, takže součin $55 \cdot 56$ je dělitelný osmi, pěti i jedenácti; máme tedy $k = 55$. Hledané nejmenší číslo je tudíž $n = 15k = 825$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. 2 body dejte za zdůvodnění toho, že n je dělitelné patnácti; 1 bod za zjištění, že je potřebné hledat dvě po sobě jdoucí přirozená čísla, jejichž součin je dělitelný pěti, osmi a jedenácti; 1 bod za poznatek, že jedno z hledaných čísel k a $k + 1$ musí být dělitelné dvěma z čísel 5, 8 a 11; 2 body pak za správné nalezení nejmenšího n.