55. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$.

2. Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnost

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$

Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost.

3. Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem.

4. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

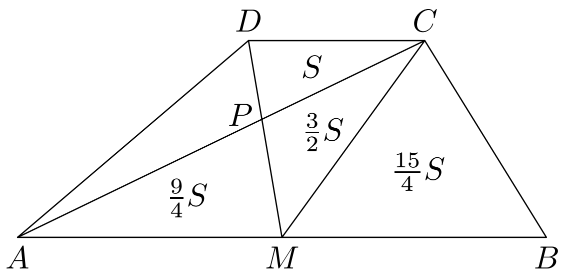
Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 21. března 2006

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Výpočet založíme na dvou známých pravidlech: (1) Jsou-li dva trojúhelníky podobné s koeficientem podobnosti k, je poměr jejich obsahů roven k^2. (2) Leží-li nějaké tři body X, Y, Z v jedné přímce a bod V mimo ni, je poměr obsahů trojúhelníků XYV a YZV roven poměru $|XY| : |YZ|$.

Ze shodnosti střídavých úhlů mezi rovnoběžkami AB a CD plyne, že trojúhelníky AMP a CDP jsou podle věty *uu* podobné, a to s koeficientem $|AM| : |CD| = \frac{3}{2}$. Označíme-li S obsah trojúhelníku CDP, je obsah trojúhelníku AMP roven $\left(\frac{3}{2}\right)^2 S = \frac{9}{4} S$ a z rovností $|AP| : |CP| = |MP| : |DP| = \frac{3}{2}$ plyne, že obsah každého z trojúhelníků APD a MPC je roven $\frac{3}{2}$ obsahu trojúhelníku CDP, tedy $\frac{3}{2} S$. Obsahy trojúhelníků AMC a BMC jsou stejné, a rovnají se tedy $\frac{9}{4} S + \frac{3}{2} S = \frac{15}{4} S$ (obr. 1). Odtud plyne, že obsah čtyřúhelníku $MBCP$ je $\frac{3}{2} S + \frac{15}{4} S = \frac{21}{4} S$, hledaný poměr je proto $4 : 21$.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za určení poměru obsahů trojúhelníků AMP a CDP. Výpočty obsahů se mohou samozřejmě lišit podle volby základního obsahu, pomocí něhož vyjadřujeme obsahy ostatních trojúhelníků v obrázku. (Pravidla, uvedená v úvodu našeho řešení, budou řešitelé pro konkrétní dvojice trojúhelníků odvozovat vyjadřováním jejich obsahů pomocí základen a výšek.)

2. Z předpokladů plyne $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$, tedy $|c| = |a|$, $|d| = |b|$.

Je-li $c = a$ a současně $d = b$, dostaneme postupně pro levou stranu L dokazované nerovnosti

$$\begin{aligned} L &= ab + ac + ad + bc + bd + cd = \\ &= ab + a^2 + ab + ab + b^2 + ab = 1 + 4ab \leqq \\ &\leqq 1 + 2(a^2 + b^2) = 3, \end{aligned}$$

neboť pro libovolná dvě čísla a, b je $2ab \leqq a^2 + b^2$, což plyne ze zřejmé nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$. Rovnost pak nastane pouze pro dvě čtveřice $a = b = c = d = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, neboť z podmínky $a = b$ a rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ plyne $a^2 = \frac{1}{2}$, tj. $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Je-li $c = -a$, $d = b$, je $L = -a^2 + b^2 \leqq a^2 + b^2 = 1 < 3$. Podobně v případě $c = a$, $d = -b$ vyjde $L = a^2 - b^2 \leqq 1$, v případě $c = -a$, $d = -b$ dokonce $L = -a^2 - b^2 \leqq 0$.

Jiné řešení. Hodnota součtu

$$S = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

je zřejmě nezáporná. Pro dvojnásobek levé strany L dokazované nerovnosti proto platí

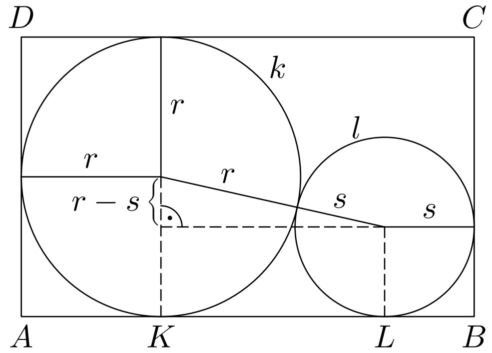
$$2L = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - S \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6,$$

odkud $L \leqq 3$. Rovnost $L = 3$ pak nastane, právě když $S = 0$, tedy právě když čísla a, b, c, d mají tutéž hodnotu, která se ovšem musí rovnat $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (viz původní řešení).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 4 body za správné řešení základního případu $c = a$, $d = b$ (z toho 2 body za vyšetření rovnosti). Zbývající 2 body za vyšetření zbývajících případů $c = -a$ nebo $d = -b$.

3. Označme r, s poloměry kružnic k, l (v centimetrech) a K, L jejich body dotyku se stranou AB (obr. 2). Je pak $|AK| = r$, $|LB| = s$, a jak snadno spočteme z Pythagorovy věty (viz též 3. úlohu školního kola kategorie C)

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$



Obr. 2

Pro délky stran obdélníku $ABCD$ platí $|AD| = 2r$, $|AB| = r + 2\sqrt{rs} + s = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2$. Podle předpokladu má být

$$2r\left(\sqrt{r} + \sqrt{s}\right)^2 = 72,$$

neboli po zkrácení dvěma a odmocnění

$$r + \sqrt{rs} = 6.$$

Odtud plyne, že $r < 6$, a pro velikost poloměru s dostáváme vyjádření

$$rs = (6 - r)^2,$$

$$s = \frac{(6 - r)^2}{r}. \tag{1}$$

Z podmínek úlohy dále plyne, že s nemůže být větší než r, protože jinak by kružnice l neležela v daném obdélníku, a protože i kružnice k musí ležet v daném obdélníku, musí být $|AB| \geqq |AD| = 2r$. Z nerovnosti $s \leqq r$ podle (1) dostaneme podmínku $36 - 12r + r^2 \leqq r^2$, tj. $r \geqq 3$. Z nerovnosti $|AB| \geqq 2r$ pak plyne $72 = |AB| \cdot |AD| \geqq 4r^2$, neboli $r^2 \leqq 18$, což pro celočíselné r znamená, že $r \leqq 4$. Pro poloměr r nám tak vycházejí jen dvě možnosti, $r \in \{3, 4\}$, odpovídající hodnoty poloměru s vypočteme ze vztahu (1).

Úloha má právě dvě řešení: $r = s = 3\,\mathrm{cm}$ a $r = 4\,\mathrm{cm}$, $s = 1\,\mathrm{cm}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů bez ohledu na to, zda řešitel vymezil jediné dvě možnosti výpočtem, nebo z pěti možností vyloučil postupně ty, které nevyhovují daným podmínkám. Za každé nesprávné řešení (třeba když žák uvede jako možný výsledek $r = 5$, $s = \frac{1}{5}$) strhněte bod.

4. Pro prvočísla p, q má platit $q(q-1) = p(145p-1)$, takže prvočíslo p dělí $q(q-1)$. Prvočíslo p nemůže dělit prvočíslo q, protože to by znamenalo, že $p = q$, a tedy $145p = p$, což nejde. Proto p dělí $q-1$, tj. $q-1 = kp$ pro nějaké k přirozené. Po dosazení do daného vztahu dostaneme podmínku

$$p = \frac{k+1}{145-k^2}.$$

Vidíme, že jmenovatel zlomku na pravé straně je kladný jedině pro $k \leqq 12$, zároveň však pro $k \leqq 11$ je jeho čitatel menší než jmenovatel: $k+1 \leqq 12 < 24 \leqq 145-k^2$. Pouze pro $k = 12$ tak vyjde p přirozené a prvočíslo, $p = 13$. Je pak $q = 157$, což je také prvočíslo. Úloha má jediné řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za úvahu o dělitelnosti, jež vede ke vztahu $q = 1 + kp$.