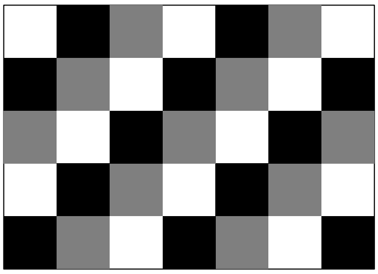
55. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

2. Obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 2\,008$ a $|BC| = 2\,006$ je rozdělen na $2\,008 \times 2\,006$ jednotkových čtverců a ty jsou střídavě obarveny černou, šedou a bílou barvou podobně jako obdélník na obrázku: čtverce při vrcholech A a B jsou černé, čtverce při vrcholech C a D jsou bílé. Určete obsah té části trojúhelníku ABC, která je šedá.



3. V lichoběžníku $ABCD$, jehož základna AB má dvakrát větší délku než základna CD, označme E střed ramene BC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC, právě když strany AB a BC jsou navzájem kolmé.

4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$1 \leqq a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leqq 9.$$

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 21. března 2006

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Danou rovnici upravíme na tvar

$$q(q-1)=p(p-1)(p+1);$$

odtud plyne nerovnost $p<q$ (kdyby totiž bylo $p \geqq q$, potom i $p-1 \geqq q-1>0$, a protože $p+1>1$, bylo by $p(p-1)(p+1)>q(q-1)$) a také to, že q dělí součin $p(p-1)(p+1)$. Protože q je prvočíslo, musí platit aspoň jeden ze vztahů $q \mid p$, $q \mid (p-1)$, $q \mid (p+1)$. Vzhledem k podmínkám $p<q$ a $p>1$ nemůže q dělit ani p, ani $p-1$, a proto $q \mid (p+1)$. Musí tedy platit $q \leqq p+1$, a to spolu s $p<q$ dává $q=p+1$.

Jediná dvě prvočísla lišící se o 1 jsou 2 a 3. Proto $p=2$ a $q=3$. Zkouškou ověříme, že skutečně platí $2+3^2=3+2^3$.

Poznámka. Nerovnost $p<q$ se dá dokázat i následující úvahou: Zřejmě $p \neq q$. Prvočísla p a q jsou tedy nesoudělná, a protože $p \mid q(q-1)$, musí platit $p \mid (q-1)$ a odtud $p \leqq q-1$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zjištění, že $p<q$, dejte 1 bod; 2 body za důkaz $q \mid (p+1)$ a další dva za $q=p+1$ a z toho vyplývající $p=2$, $q=3$. Jeden bod za ověření, že dvojice $p=2$, $q=3$ je skutečně řešením.

2. Šedá část obdélníku $ABCD$ se stranami délek $3n+1$ a $3n-1$, který má jednotkové čtverce při dvou vrcholech obarveny černou barvou a jednotkové čtverce při dalších dvou vrcholech bílou barvou, je souměrná podle středu obdélníku (stačí si uvědomit souměrnou sdruženost šedých čtverců nejbližších souměrně sdruženým vrcholům A a C, resp. B a D, symetrie na celém obdélníku pak plyne z toho, ze šedé čtverce se v každém řádku i sloupci opakují s periodou 3). Proto je šedá část trojúhelníku ABC shodná se šedou částí trojúhelníku CDA, a tedy obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$.

Obdélník $ABCD$ rozdělme na obdélník se stranami délek $3n$ a $3n-1$ a pás $3n-1$ jednotkových čtverců, v němž jeden koncový čtverec je černý a druhý bílý. V obdélníku $3n \times (3n-1)$ je počet černých, bílých i šedých jednotkových čtverců stejný, takže šedých je $n(3n-1)$. Kdybychom k pásu délky $3n-1$ přidali jeden šedý čtverec, byl by tam rovněž stejný počet n černých, bílých a šedých čtverců; v páse délky $3n-1$ je tedy $n-1$ šedých čtverců. Šedých čtverců v obdélníku $ABCD$ je $n(3n-1)+(n-1)=3n^2-1$ a šedá část trojúhelníku ABC má obsah $S=\frac{1}{2}(3n^2-1)$; pro obdélník $2\,008 \times 2\,006$ je $n=669$, takže

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot(3\cdot 669^2-1)=\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{3}\cdot 2\,007^2-1\Big)=\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{4\,028\,049}{3}-1\Big)= \\ &= \frac{4\,028\,046}{6}=671\,341. \end{aligned}$$

Poznámka. Obsah šedé části trojúhelníku ABC můžeme určit i tak, že po diagonálách postupně spočítáme šedé čtverce, jež jsou celé obsaženy v trojúhelníku ABC, a připočteme polovinu počtu čtverců v prostřední šedé diagonále obdélníku $ABCD$, která je souměrná podle středu obdélníku, takže její část ležící v trojúhelníku ABC je shodná s částí ležící v trojúhelníku CDA:

$$S = 3 + 6 + \ldots + 2\,004 + \frac{1}{2} \cdot 2\,006 = 334 \cdot 2\,007 + 1\,003 = 671\,341.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body udělte za důkaz toho, že obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$. Nestačí argumentovat shodností trojúhelníků ABC a CDA, například obsahy jejich bílých částí nejsou stejné. Další tři body udělte za správný výpočet obsahu.

3. Označme S střed úhlopříčky AC. Úsečka SE je střední příčka trojúhelníku ABC, takže $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Navíc je $SE \parallel AB \parallel DC$. Úsečky SE a DC jsou rovnoběžné a shodné, proto je $SECD$ rovnoběžník.

Kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází bodem S právě tehdy, je-li rovnoběžník $SECD$ tětivový. Čtyřúhelník je tětivový, právě když je součet velikostí jeho protilehlých úhlů $180°$. V rovnoběžníku jsou ale protilehlé úhly shodné, takže je tětivový, právě když to je pravoúhelník, neboli když úhel ECD, a tedy i úhel ABC je pravý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body za důkaz toho, že $SECD$ je rovnoběžník a další 3 body za důkaz kolmosti.

4. Označme $V = a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c)$. Platí

$$a + b + c + (1 - a)(1 - b)(1 - c) = 1 + ab + ac + bc - abc = 1 + ab(1 - c) + ac + bc \geqq 1,$$
$$2(ab + bc + ca) + 2(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqq 0;$$

sečtením obou nerovností dostaneme $V \geqq 1$.

Označme $x = 1 - a$, $y = 1 - b$, $z = 1 - c$, takže x, y, z jsou čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Je tedy

$$\begin{aligned} V &= 1 - x + 1 - y + 1 - z + 2\,[(1 - x)(1 - y) + (1 - y)(1 - z) + (1 - z)(1 - x)] + 3xyz = \\ &= 3 - (x + y + z) + 2\,[3 - 2(x + y + z) + xy + yz + zx] + 3xyz = \\ &= 9 - 5(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) + 3xyz = \\ &= 9 - 2x(1 - y) - 2y(1 - z) - 2z(1 - x) - 3x(1 - yz) - 3y - 3z \leqq 9. \end{aligned}$$

Jiné řešení. Jestliže $a = 0$, pak

$$\begin{aligned} V &= b + c + 2bc + 3(1 - b)(1 - c) = 3 + 5bc - 2b - 2c = \\ &= 3 + 5\Big(b - \frac{2}{5}\Big)\Big(c - \frac{2}{5}\Big) - \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Protože $b, c \in \langle 0, 1\rangle$, výraz $\big(b - \frac{2}{5}\big)\big(c - \frac{2}{5}\big)$ nabývá největší hodnoty pro $b = c = 1$ a nejmenší hodnoty pro $\{b, c\} = \{0, 1\}$, tudíž

$$3 + 5 \cdot \Big(-\frac{2}{5}\Big) \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \leqq V \leqq 3 + 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5}$$

čili
$$1 \leqq V \leqq 4.$$

Jestliže $a = 1$, pak
$$V = 1 + b + c + 2(b + bc + c),$$
zřejmě tedy
$$1 \leqq V \leqq 9.$$

Jsou-li b, c libovolná, ale pevně zvolená čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je buď V lineární funkcí proměnné $a \in \langle 0, 1\rangle$, anebo je V konstantní. Lineární funkce definovaná v uzavřeném intervalu nabývá svých extrémních hodnot v krajních bodech tohoto intervalu. Protože pro $a = 0$ i pro $a = 1$ platí $1 \leqq V \leqq 9$, platí tato nerovnost pro všechna $a \in \langle 0, 1\rangle$.

Jiné řešení. Protože výraz V je lineární vzhledem ke každé z proměnných $a, b, c \in \in \langle 0, 1\rangle$, nabývá svých extrémních hodnot pro $\{a, b, c\} \in \{0, 1\}$. Pro $a = b = c = 0$ je $V = 3$. Jsou-li dvě z čísel a, b, c rovna nule a třetí je 1, platí $V = 1$. Jsou-li dvě z čísel a, b, c rovna jedné a třetí je nula, potom $V = 4$. Pro $a = b = c = 1$ je $V = 9$. Proto platí $1 \leqq V \leqq 9$ pro všechna $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů: za důkaz nerovnosti $V \geqq 1$ dejte 2 body, za důkaz nerovnosti $V \leqq 9$ udělte 4 body.