55. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva, přičemž každé sehrálo s každým právě jedno utkání. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet branek vstřelených v turnaji, přitom v žádných dvou utkáních jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek?
2. Vrchol C čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ, body E, F, G a H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK a DC. Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$.
3. Kružnice k, l, m se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice k a l stejně jako kružnice l a m mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice l, jestliže poloměry kružnic k a m jsou 3 cm a 12 cm.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

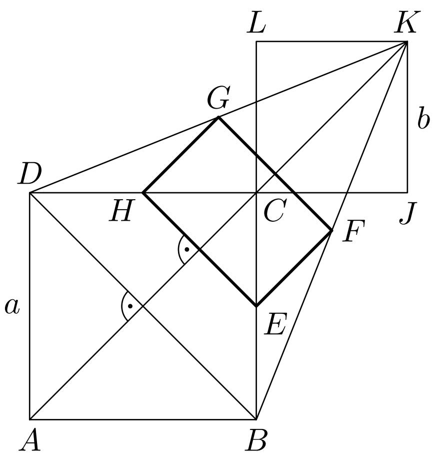
ve čtvrtek 26. ledna 2006

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Jestliže každé družstvo sehraje s každým jedno utkání, sehraje každé družstvo v turnaji celkem tři utkání a počet všech utkání bude $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$. Máme tedy najít šest různých přirozených čísel (nula nedělí žádné číslo) s nejmenším možným součtem tak, aby byl tento součet dělitelný každým z šesti sčítanců. Nejmenší součet šesti různých přirozených čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, ten však není dělitelný např. dvěma nebo šesti. Další možností je nahradit číslo 6 číslem 7, součet bude 22. Ten však není dělitelný např. třemi. Součet 23 nemůže vyhovovat, protože číslo 23 je prvočíslo, je dělitelné pouze dvěma přirozenými čísly. Konečně číslo 24 je součtem čísel 1, 2, 3, 4, 6 a 8, přitom je číslo 24 dělitelné každým z čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8. V turnaji proto mohlo padnout 24 branek, ne však méně.

Za určení počtu 6 utkání a odhad, že $1+2+3+4+5+6$ je nejvýše rovno počtu branek, udělte 1 bod, za vyloučení součtů 21, 22 a 23 udělte 2 body, za určení vyhovující šestice 1, 2, 3, 4, 6, 8 se součtem 24 další tři body, tedy 6 bodů za úplné řešení.

2. Označme $a = \sqrt{S}$, $b = \sqrt{T}$ strany čtverců $ABCD$, $CJKL$. Úsečka EH je střední příčkou trojúhelníku BCD (obr. 1), úsečka FG je střední příčkou v trojúhelníku BKD,



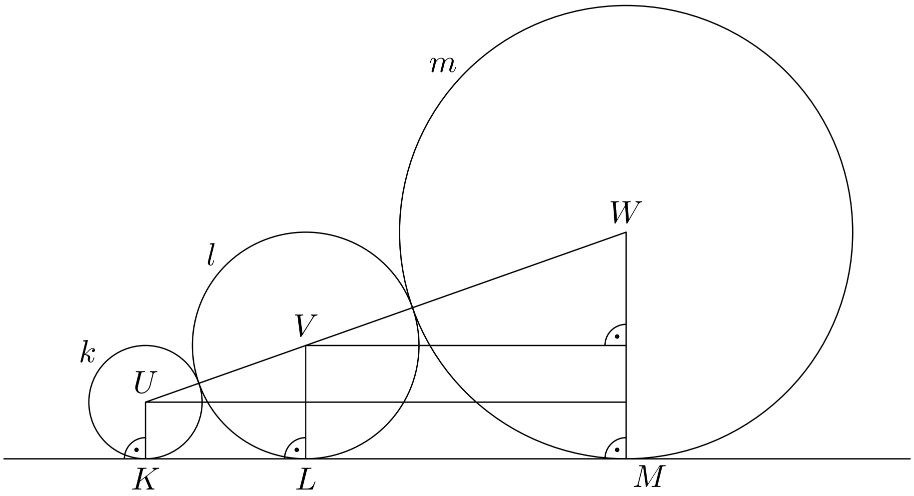
Obr. 1

proto je $2|EH| = 2|FG| = |BD|$ a úsečky EH, FG jsou rovnoběžné s BD. Podobně je úsečka HG střední příčkou v trojúhelníku DCK a úsečka EF je střední příčkou v trojúhelníku BCK. Proto je $2|HG| = 2|EF| = |CK|$ a úsečky HG, EF jsou rovnoběžné s CK, a tedy kolmé na JL a BD. Rovnoběžník $EFGH$ je tudíž obdélník s obsahem

$$|EF| \cdot |FG| = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot b\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{ST}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za objev, že čtyřúhelník $EFGH$ je obdélník, udělte 3 body, další 3 body za určení jeho obsahu.

3. Vzájemná poloha kružnic a jejich společné tečny musejí vypadat jako na obr. 2, kde jsme písmeny K, L, M označili body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně, U,



Obr. 2

V, W jejich středy a r poloměr kružnice l (v centimetrech). Z pravoúhlých lichoběžníků $KLVU$, $LMWV$, $KMWU$ plyne podle Pythagorovy věty

$$|KL|^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r,$$
$$|LM|^2 = (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r$$

a

$$|KM|^2 = (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144.$$

Jelikož $|KL| + |LM| = |KM|$, dostaneme z prvních dvou vztahů

$$|KM|^2 = (|KL| + |LM|)^2 = |KL|^2 + 2|KL||LM| + |LM|^2 = 60r + 2\sqrt{12 \cdot 48}\, r,$$

což spolu s třetím vztahem dává po úpravě pro r rovnici

$$4r^2 - 48r + 144 = 0.$$

Protože $4r^2 - 48r + 144 = 4(r^2 - 12r + 36) = 4(r-6)^2$, má tato rovnice jediné řešení $r = 6$ a poloměr kružnice l je tedy 6 cm.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vyjádření délek úseček KL, LM, KM pomocí r udělte 3 body, další 3 body za správný výpočet poloměru r.