Úlohy domácího kola kategorie C

1. *a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.*
b) Určete všechna přirozená čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120.

Řešení. a) Číslo $n = m^6 - m^2 = m^2(m^2 - 1)(m^2 + 1)$ je vždy dělitelné čtyřmi, protože při sudém m je m^2 dělitelné čtyřmi a při lichém m jsou čísla $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ obě sudá, jedno z nich je dokonce dělitelné čtyřmi a jejich součin je tedy dělitelný osmi. Ze tří po sobě jdoucích přirozených čísel $m^2 - 1$, m^2, $m^2 + 1$ je právě jedno dělitelné třemi, a proto je i číslo n dělitelné třemi. Je-li m dělitelné pěti, je m^2 dělitelné pěti, dokonce dvaceti pěti. V opačném případě je m tvaru $5k + r$, kde r je rovno některému z čísel 1, 2, 3, 4 a k je přirozené nebo 0. Pak je $m^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ a r^2 se rovná některému z čísel 1, 4, 9, 16. V prvním a v posledním případě je číslo $m^2 - 1$ dělitelné pěti, v ostatních dvou případech je číslo $m^2 + 1$ dělitelné pěti. Je tedy číslo n vždy dělitelné nesoudělnými čísly 4, 3 a 5, a tedy i jejich součinem 60.

b) Už jsme ukázali, že v případě lichého m je součin $(m^2 - 1)(m^2 + 1)$ dělitelný osmi, a číslo $n = m^6 - m^2$ je tedy dělitelné číslem $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Je-li však číslo m sudé, jsou čísla $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ lichá, žádné není dělitelné dvěma. Číslo n je pak dělitelné osmi pouze v případě, že m^2 je dělitelné osmi, tedy m je dělitelné čtyřmi. Číslo n je pak dělitelné šestnácti, třemi a pěti, a proto dokonce číslem 240.

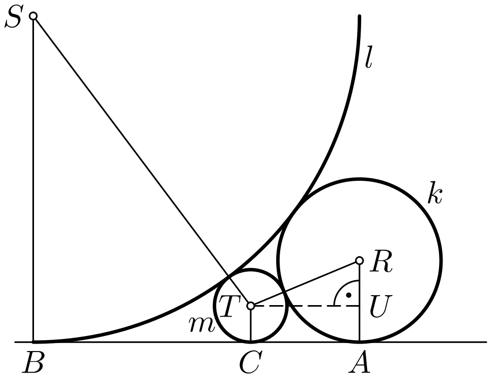
Naše výsledky můžeme shrnout: Číslo $n = m^6 - m^2$ je dělitelné číslem 120, právě když m je liché nebo dělitelné čtyřmi.

Návodné úlohy:

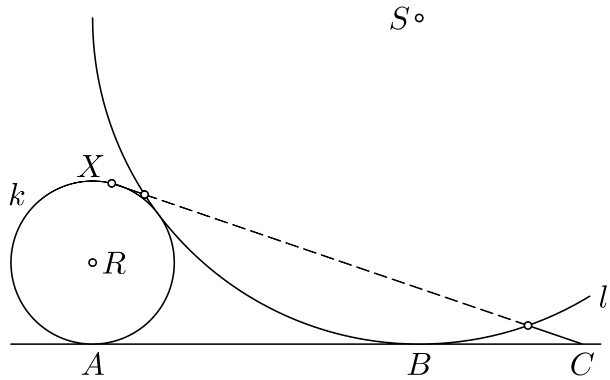
1. Dokažte, že číslo $n^3 - n$ je pro každé přirozené číslo n dělitelné šesti.
2. Najděte všechna dvojciferná čísla n, pro která je číslo $n^3 - n$ dělitelné číslem 100. [Řešením jsou právě čísla 24, 25, 49, 51, 75, 76 a 99, viz úlohu 50–C–S–3.]
3. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která číslo $n^2 + 1$ dělí číslo $n^3 - 8n^2 + 2n$. [Návod: $n^3 - 8n^2 + 2n = (n - 8)(n^2 + 1) + n + 8$, pro $n = 1, 3$ nedělí $n^2 + 1$ číslo $n + 8$, pro $n > 3$ je $n^2 + 1$ větší než $n + 8$, a tedy nedělí $n + 8$. Jediné řešení je $n = 2$, viz 40–C–S–2.]

2. *Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení.*

Řešení. Označme po řadě R, S, T středy a A, B, C body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně a $r = 3$, $s = 12$ a t jejich poloměry (délky a obsahy budeme počítat bez jednotek kvůli jednoduššímu dosazování). V lichoběžníku (který v případě rovnosti $r = t$ je ovšem obdélníkem) $ARTC$ (obr. 1) je $|RT| = r + t$. Označíme-li U průsečík přímky AR a přímky vedené bodem T rovnoběžně s AC, je $|RU| = |r - t|$. Z pravoúhlého trojúhelníku RUT plyne $|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}$. Analogicky bychom z lichoběžníků $CTSB$ a $ARSB$ dostali vztahy $|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$ a $|AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3 \cdot 12} = 12$.



Obr. 1



Obr. 2

Uvažujme nejdříve případ, kdy bod C leží mezi body A a B. Je pak $2\sqrt{3t}+4\sqrt{3t} = 12$, odkud $t = \frac{4}{3}$. Jestliže bod A leží mezi body C a B, dostaneme obdobně rovnici $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkud $t = 12$. Rovnice $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$, kterou dostaneme pro polohu bodu B mezi body A a C, nemá zjevně žádné řešení. Že takový případ není možný, je vidět i z obr. 2, protože každá kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě X různém od A a přitom obsahuje bod C polopřímky opačné k polopřímce BA, musí ve svém vnitřku obsahovat i tětivu kružnice l (vyznačenou na obrázku), takže se jí nemůže dotýkat.

Poloměr kružnice m je tedy $\frac{4}{3}$ cm nebo 12 cm.

Návodné úlohy:

1. Určete poloměry tří kružnic, jejichž středy tvoří vrcholy trojúhelníku se stranami délek a, b, c, a každé dvě mají vnější dotyk.
2. Kružnice k, l se středy K, L a poloměry r, s mají vnější dotyk v bodě T a kromě společné tečny t v tomto bodě se dotýkají ještě další společné tečny: kružnice k v bodě A, kružnice l v bodě B. Bod C je průsečíkem přímek AB, t. Dokažte, že trojúhelníky KCL, ATB jsou pravoúhlé. [Ukažte pomocí Pythagorovy věty, že $|CA| = |CT| = |CB| = \sqrt{rs}$, viz úlohu 50–C–II–2.]

3. *Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel.*

Řešení. Nechť x, y, z je taková trojice navzájem různých přirozených čísel, pro kterou platí: Každé z nich dělí jejich součet $x+y+z$, takže x dělí $y+z$, y dělí $x+z$ a z dělí $x+y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x < y < z$. Je tedy $x+y = kz$ pro vhodné přirozené k. Protože je zároveň $x+y < 2z$, je nutně $k = 1$, $x+y = z$. Dále y dělí $x+z = 2x+y < 3y$, takže $2x+y = 2y$, $y = 2x$. Tři přirozená čísla daných vlastností mají tedy tvar x, $y = 2x$, $z = 3x$, kde x je přirozené. Protože mají být trojmístná, musí být $x \geqq 100$, $3x \leqq 999$, takže $100 \leqq x \leqq 333$. Hledaný počet trojic je $333 - 99 = 234$.

Návodné úlohy:

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel k, l, pro které platí $kl - k - 2l = 8$. [Rovnost napíšeme ve tvaru $l(k-2) = k+8$, $k-2$ tedy dělí $k+8 = (k-2)+10$, takže $k-2$ dělí číslo 10, takže $k = 3$, $l = 11$, nebo $k = 4$, $l = 6$, nebo $k = 7$, $l = 3$, nebo $k = 12$, $l = 2$.]
2. Najděte všechny trojice přirozených čísel x, y, z, které splňují soustavu rovnic $y+z = 5x$, $z + x = 2y$, $x + y = z$. [Výsledek: $y = 2x$, $z = 3x$.]

4. *Je dáno přirozené číslo n ($n \geqq 2$) a reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, pro která platí*

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokažte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n.$$

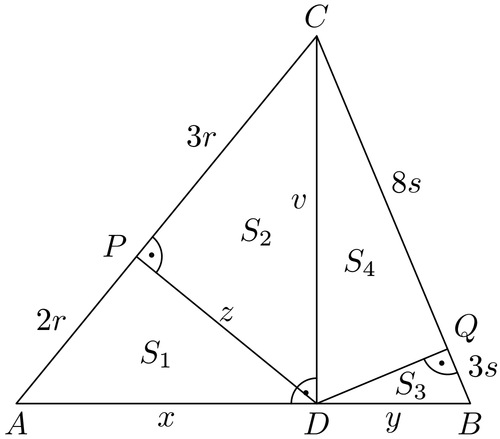
Řešení. Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou podle podmínek úlohy nenulová a všechna s lichými indexy jsou si rovna, rovnají se nenulovému číslu a; všechna čísla se sudými indexy jsou si také rovna, rovnají se $1/a$, převrácené hodnotě a. Je-li n liché, plyne z rovnice $x_1x_2 = x_nx_1$ rovnost $x_n = x_2$, takže všechna x_i jsou stejná, rovnají se 1 nebo -1, neboť to jsou jediné hodnoty a, pro něž $a = 1/a$, takže součet jejich druhých mocnin je n. Je-li n sudé, rovná se součet druhých mocnin všech hodnot x_i součtu $n/2$ hodnot a^2 a $n/2$ hodnot $1/a^2$. Avšak $a^2 + 1/a^2 \geqq 2$ pro každé nenulové číslo a, což plyne z nerovnosti $(a^2 - 1)^2 \geqq 0$. Proto je součet druhých mocnin všech čísel x_i větší nebo roven n.

Návodné úlohy:

1. Jestliže pro kladná čísla a, b platí $ab = 1$, pak je $a+b \geqq 2$. Dokažte. [Vyjdeme ze vztahu $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$.]
2. Jestliže pro reálná čísla x, y, z platí $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2$, je $x = y = z$. Dokažte. [Danou rovnost upravte na tvar $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$.]
3. Najděte všechny trojice kladných čísel a, b, c, pro které platí $a + 2b + 3c + 1/a + 2/b + 3/c = 12$. [Ukažte, že součet kladného čísla a jeho převrácené hodnoty je větší nebo roven 2, vyhovuje pouze trojice $a = b = c = 1$, viz 33–C–I–1.]
4. Určete všechny uspořádané čtveřice reálných čísel a, b, c, d, pro které platí $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = ab + cd$. [Z daných vztahů plyne $a^2 + c^2 + b^2 + d^2 = 2ab + 2cd$, tedy $(a - b)^2 + (c - d)^2 = 0$, odkud $b = a$, $d = c$. Řešením jsou všechny čtveřice tvaru (a, a, b, b).]

5. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$.*

Řešení. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ (obr. 3). Z podobnosti trojúhelníků ADP a DCP plyne $x^2 : v^2 = S_1 : S_2 = 2 : 3$. Podobně z podobnosti trojúhelníků DBQ, CDQ plyne $y^2 : v^2 = S_3 : S_4 = 3 : 8$. Odtud $x^2 : y^2 = (2 \cdot 8) : (3 \cdot 3) = 16 : 9$, $x : y = 4 : 3$. Trojúhelníky ADC, DBC mají společnou výšku, proto $(S_1 + S_2) : (S_3 + S_4) = x : y = 4 : 3$. Za S_2 sem dosadíme $\frac{3}{2}S_1$, za S_4 dosadíme $\frac{8}{3}S_3$ a po úpravě dostaneme $S_1 : S_3 = 88 : 45$.



Obr. 3

Jiné řešení. Z poměru obsahů trojúhelníku ADP a trojúhelníku CDP se společnou výškou DP plyne, že je $|AP| : |CP| = 2 : 3$, takže můžeme psát $|AP| = 2r$, $|CP| = 3r$, podobně $|BQ| = 3s$, $|CQ| = 8s$. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ a $z = |PD|$ (obr. 3). Z pravoúhlých trojúhelníků ADP, ADC, PDC plyne $x^2 = 4r^2 + z^2$, $z^2 + 9r^2 = v^2 = 25r^2 - x^2$. Odtud $z^2 = 16r^2 - x^2 = 16r^2 - (4r^2 + z^2)$, neboli $2z^2 = 12r^2$, $z = r\sqrt{6}$, $x = r\sqrt{10}$, $v = r\sqrt{15}$, $S_1 = r^2\sqrt{6}$. Analogicky bychom dostali z trojúhelníků BDQ, BDC, QDC, že $v = 2s\sqrt{22}$, $y = s\sqrt{33}$, $S_3 = 3s^2\sqrt{6}$, tedy užitím vztahu $v^2 = 15r^2 = 88s^2$ dostaneme výsledek $S_1 : S_3 = 88 : 45$.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD délek 12 cm a 6 cm je svými úhlopříčkami rozdělen na 4 trojúhelníky. Určete jejich obsahy, jestliže se obsah lichoběžníku rovná $45\,\mathrm{cm}^2$. [Obsahy jsou 5, 10, 10 a $20\,\mathrm{cm}^2$.]
2. Konvexní čtyřúhelník je úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, tři z nich mají obsahy $2\,\mathrm{cm}^2$, $3\,\mathrm{cm}^2$ a $4\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtvrtého. [Výsledek je $6\,\mathrm{cm}^2$, $\frac{8}{3}\,\mathrm{cm}^2$ nebo $\frac{3}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Označíme-li S_1, S_2, S_3, S_4 obsahy trojúhelníků v pořadí, v jakém spolu sousedí, platí $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.]

6. *Rozhodněte, které z čísel*

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}+\sqrt{q+\sqrt{p}}, \qquad \sqrt{p+\sqrt{p}}+\sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je větší, jsou-li p a q různá kladná čísla.

ŘEŠENÍ. Daná čísla, která označíme po řadě A a B, nebudeme porovnávat přímo. Místo toho porovnáme jejich druhé mocniny a využijeme poznatku, že pro libovolná kladná čísla u, v platí $u > v$, právě když platí $u^2 > v^2$. Pro daná čísla máme

$$A^2 = p+\sqrt{q}+2\sqrt{(p+\sqrt{q})\,(q+\sqrt{p})}+q+\sqrt{p},$$
$$B^2 = p+\sqrt{p}+2\sqrt{(p+\sqrt{p})\,(q+\sqrt{q})}+q+\sqrt{q}$$

a vidíme, že mimo „dlouhých“ odmocnin jsou na pravých stranách obou vyjádření čtyři stejní sčítanci (v odlišných pořadích). Proto nerovnost $A^2 > B^2$ platí, právě když je „dlouhá odmocnina“ v prvním řádku větší než ve druhém řádku, neboli když pro odmocňované součiny platí nerovnost

$$(p+\sqrt{q})\,(q+\sqrt{p}) > (p+\sqrt{p})\,(q+\sqrt{q})\,.$$

Roznásobením a dalšími algebraickými úpravami dostaneme postupně ekvivalentní nerovnosti

$$pq+\sqrt{pq}+p\sqrt{p}+q\sqrt{q} > pq+\sqrt{pq}+p\sqrt{q}+q\sqrt{p},$$
$$(p-q)\sqrt{p}-(p-q)\sqrt{q} > 0,$$
$$(p-q)(\sqrt{p}-\sqrt{q}) > 0.$$

Vysvětlíme, proč poslední nerovnost (a tedy i výchozí nerovnost $A > B$) v případě $p \neq q$ vždy platí. Je-li totiž $p > q$, je i $\sqrt{p} > \sqrt{q}$, takže oba činitelé součinu $(p-q)(\sqrt{p}-\sqrt{q})$ jsou kladní; je-li $p < q$, jsou oba činitelé naopak záporní, v obou případech je proto daný součin kladný.

Odpověď: Větší je první z daných dvou čísel.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Které z čísel $\sqrt{3+\sqrt{2}}$, $\sqrt{6-\sqrt{2}}$ je větší? [Větší je druhé číslo. Odpovídající nerovnost po umocnění upravte na $2\sqrt{2} < 3$.]
2. Najděte všechny dvojice kladných čísel a, b, pro které platí

$$\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a} = \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a+b}.$$

[Po umocnění upravte. Výsledkem jsou všechny dvojice a, b, v nichž je $a = 1$ nebo $b = 1$, tedy i dvojice $a = b = 1$.]