55. ročník Matematické olympiády

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

Řešení. Z vlastností funkcí tangens a cotangens vyplývá, že $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Označme dále

$$L = \sqrt{2}(\sin t + \cos t) \qquad \text{a} \qquad P = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

S ohledem na periodičnost funkcí sin, cos, tg, cotg stačí rozlišit následující případy.

- $t \in (0; \frac{1}{2}\pi)$: Pro každé takové t platí podle návodných úloh 1 a 2 nerovnosti

$$\sin t + \cos t \leqq \sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = \operatorname{tg}^3 t + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} \geqq 2.$$

  Rovnost v každé z nich nastává, právě když $t = \frac{1}{4}\pi$. Dostáváme tak odhad

$$L \leqq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \leqq P.$$

  Rovnice $L = P$ je tedy splněna pouze v případě $L = P = 2$ a jediné reálné číslo t z uvažovaného intervalu $(0; \frac{1}{2}\pi)$, které dané rovnici vyhovuje, je $t = \frac{1}{4}\pi$.

- $t \in (\frac{1}{2}\pi; \pi)$: Pro každé takové t platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t > \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = -\left((-\operatorname{tg} t)^3 + \frac{1}{(-\operatorname{tg} t)^3}\right) \leqq -2.$$

  Pro libovolné t z uvažovaného intervalu pak platí odhady

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

  což znamená, že na tomto intervalu daná rovnice nemá žádné řešení.

- $t \in (\pi; \frac{3}{2}\pi)$: Pro libovolné t z uvažovaného intervalu jsou obě hodnoty $\sin t$, $\cos t$ záporné (a hodnoty $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{cotg} t$ kladné), takže platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t < 0 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t > 0.$$

  Odtud

$$L < 0 < P,$$

a tudíž ani na tomto intervalu daná rovnice nemá žádné řešení.

▷ $t \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$: Podobně jako v druhém případě odvodíme, že pro libovolné t z uvažovaného intervalu platí nerovnosti

$$\sin t + \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \leqq -2.$$

Proto

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

což znamená, že ani v tomto případě nemá daná rovnice žádné řešení.

Závěr. Vzhledem k periodičnosti uvažovaných goniometrických funkcí jsou řešením dané rovnice všechna reálná čísla t tvaru

$$t = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi,$$

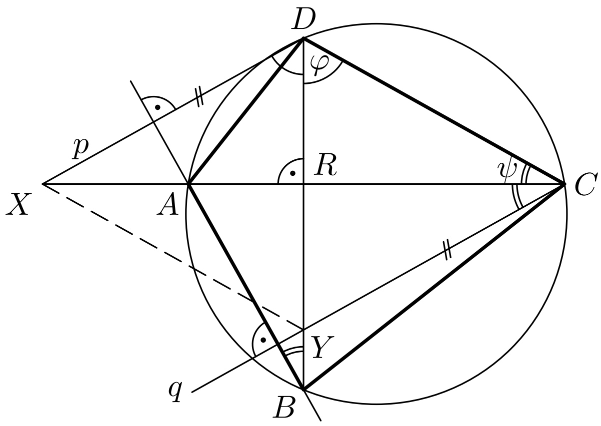
kde k je libovolné celé číslo.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte nerovnost $|\sin t + \cos t| \leqq \sqrt{2}$. [Ukažte, že $\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin(\frac{1}{4}\pi + t)$.]
2. Dokažte, že pro libovolné přirozené n a pro libovolné $t \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ platí $\operatorname{tg}^n t + \operatorname{cotg}^n t \geqq 2$. [Stačí si uvědomit známou nerovnost $x + 1/x \geqq 2$.]
3. Jestliže pro nenulová reálná čísla x, y, z platí
$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) = 1,$$
pak $xy + yz + zx < 0$. Dokažte. [42–A–II–3]
4. V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic
$$\begin{aligned}\sin x + \cos y &\geqq \sqrt{2},\\ \sin y + \cos z &\geqq \sqrt{2},\\ \sin z + \cos x &\geqq \sqrt{2}.\end{aligned}$$
[50–A–I–4]

2. *Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.*

Řešení. Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku a pro jednoduchost také φ, ψ velikosti úhlů CDR a DCR (obr. 1). Protože úhlopříčky jsou na sebe kolmé, je $\varphi + \psi = 90°$. Vzhledem k tomu, že oba vrcholy B, C leží ve stejné polorovině určené



Obr. 1

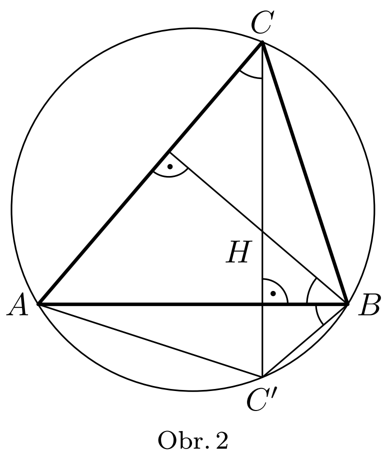
tětivou AD, plyne z rovnosti příslušných obvodových úhlů, že $|\sphericalangle ABD| = \psi$. A protože DX je kolmá na AB, je rovněž $|\sphericalangle XDB| = \varphi$. To znamená, že trojúhelník XCD je rovnoramenný se základnou XC. Úplně stejně ovšem zjistíme, že i trojúhelník YCD je rovnoramenný se základnou YD. Platí tedy $|XD| = |CD| = |CY|$, takže DX a CY jsou shodné a rovnoběžné úsečky. To znamená, že $XYCD$ je rovnoběžník, který jak víme, má tři strany shodné, tudíž je to kosočtverec nebo čtverec.

Jiné řešení. Využijeme ne zcela běžně známý poznatek, že bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek daného trojúhelníku podle jeho libovolné strany leží na kružnici trojúhelníku opsané (viz návodnou úlohu).

Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku. Podle podmínek úlohy je X průsečík výšek trojúhelníku ABD a Y průsečík výšek trojúhelníku ABC. Podle předchozího tvrzení je bod C obrazem bodu X v osové souměrnosti podle přímky BD, takže R je střed úsečky XC. Analogicky je R střed úsečky YD. Protože úsečky XC a YD jsou na sebe kolmé, je $XYCD$ kosočtverec nebo čtverec.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek daného trojúhelníku podle jeho libovolné strany leží na kružnici trojúhelníku opsané. Dokažte. [Úhly ACC' a ABC' jsou shodné obvodové úhly nad společnou tětivou AC (obr. 2) a mají velikost $90° - \alpha$, což je i velikost úhlu HBA. Pokud $\alpha \geqq 90°$, zaměňte role vrcholů A a B.]



Obr. 2

2. Nechť obě úsečky spojující středy protilehlých stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ mají stejnou délku. Dokažte, že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé a že platí rovnost
$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$
[47–B–S–2]
3. Nechť $ABCD$ je lichoběžník ($AB \parallel CD$), jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé. Dokažte nerovnost $|AB| + |CD| < |BC| + |DA|$. [46–B–II–3]

3. *Posloupnost* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nenulových *celých čísel má tu vlastnost, že pro každé* $n \geqq 0$ *platí* $a_{n+1} = a_n - b_n$, *kde* b_n *je číslo, které má stejné znaménko jako číslo* a_n, *ale opačné pořadí číslic (zápis čísla* b_n *může na rozdíl od zápisu čísla* a_n *začínat jednou nebo více nulami). Například pro* $a_0 = 1\,210$ *je* $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534$, …

a) Dokažte, že posloupnost (a_n) *je periodická.*

b) Zjistěte, jaké nejmenší přirozené číslo může být a_0.

Řešení. a) Abychom dokázali, že uvažovaná posloupnost (a_n) je periodická, stačí ukázat, že existují přirozená čísla n_0 a p taková, že $a_{n_0+p} = a_{n_0}$. Protože každý další člen posloupnosti je jednoznačně určen předcházejícím členem, bude už pro každé $n \geqq n_0$ platit $a_{n+p} = a_n$ (posloupnost bude [počínaje členem a_{n_0}] periodická s délkou periody p).

Číslo $a_{n+1} = a_n - b_n$ má ovšem nejvýše tolik číslic jako číslo a_n. To je například vidět z nerovnosti $|a-b| \leqq \max(|a|,|b|)$. Má-li tedy počáteční člen posloupnosti k číslic, budou všechny ostatní členy posloupnosti patřit do konečné množiny nejvýše $2(10^k - 1)$ nenulových celých čísel. Protože posloupnost je nekonečná, musí obsahovat aspoň dva stejné členy. Odtud plyne, že uvažovaná posloupnost je periodická.

b) Protože uvažovaná posloupnost neobsahuje žádný člen rovný nule, nemůže být jejím členem žádné *palindromické* číslo (číslo, které „přečteme" stejně odpředu i odzadu), speciálně tedy ani číslo jednomístné.

Předpokládejme nejprve, že členem uvažované posloupnosti je kladné dvojmístné číslo $a_0 = \overline{ab} = 10a + b$, pro které $a_1 = 9(a - b)$. Vidíme, že všechny další členy (zejména tudíž ty, které se budou periodicky opakovat) musí být dělitelné devíti. Stačí proto probrat všechny dvojmístné násobky devíti $18, \ldots, 99$. Jak snadno zjistíme podle následujícího schématu,

$$\begin{tikzcd}
81 \arrow[dr] & & & & \\
& 63 \arrow[dr] & & & \\
18 \arrow[ur] & & 27 \arrow[dr] & & \\
& 36 \arrow[ur] & & 45 \arrow[dr] & \\
& & 72 \arrow[ur] & & 9 \\
& & & 54 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

pro každé takové číslo se mezi členy posléze objeví jednomístná devítka. To znamená, že uvažovaná posloupnost nemůže obsahovat ani dvojmístná čísla. (Čísla ve schématu jsou v absolutní hodnotě, protože příslušná změna znaménka nemá na právě získaný výsledek vliv. Podobně nemusíme zvlášť vyšetřovat ani případ záporného dvojmístného čísla a_0.)

Předpokládejme dále, že členem uvažované posloupnosti je trojmístné číslo $a_0 = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, pro které $a_1 = 99(a - c)$. Opět stačí prozkoumat jen trojmístná čísla $99, 198, \ldots, 990$ (násobky čísla 99). Podobně jako v předchozím případě podle následujícího schématu

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small]
891 \arrow[dr] & & & & \\
& 693 \arrow[dr] & & & \\
198 \arrow[ur] & & 297 \arrow[dr] & & \\
& 396 \arrow[ur] & & 495 \arrow[dr] & \\
& & 792 \arrow[ur] & & 99 \\
& & & 594 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

zjistíme, že pro taková čísla se mezi členy posloupnosti nakonec objeví dvojmístné číslo 99. Posloupnost tedy nemůže obsahovat ani trojmístná čísla.

Protože pro čtyřmístné číslo $a_0 = \overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$ dostáváme $a_1 = 999(a - d) + 90(b - c)$, zjistíme opět, že prvních deset nejmenších čtyřmístných čísel (pro něž je v příslušném desítkovém zápise $b = c = 0$, takže jako členy posloupnosti vycházejí jen násobky čísla 999) členem uvažované posloupnosti být nemůže: pro čísla $1\,000$ a $1\,002$ dostaneme rovnou $|a_1| = 999$, číslo $1\,001$ je palindromické a pro čísla $1\,003, \ldots, 1\,009$ dostaneme $|a_1| = 1\,998, 2\,997, \ldots, 8\,991$ a podle obdobného schématu

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small]
8\,991 \arrow[dr] & & & & \\
& 6\,993 \arrow[dr] & & & \\
1\,998 \arrow[ur] & & 2\,997 \arrow[dr] & & \\
& 3\,996 \arrow[ur] & & 4\,995 \arrow[dr] & \\
& & 7\,992 \arrow[ur] & & 999 \\
& & & 5\,994 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

po několika krocích trojmístné číslo 999. Pro následující čtyřmístné číslo $1\,010$ dostaneme trojmístné číslo 909 a pro $1\,011$ dokonce dvojmístné číslo -90. Teprve pro číslo $1\,012$ dostaneme posloupnost čtyřmístných čísel

$$-1\,089,\ 8\,712,\ 6\,534,\ 2\,178,\ -6\,534,$$

která se zřejmě po dalším členu zacyklí.

Závěr. Nejmenší možné číslo a_0 je $1\,012$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Pro libovolná reálná čísla platí $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$. Dokažte.
2. Přečteme-li odzadu číslo, které je dělitelné číslem 11, dostaneme opět násobek čísla 11. Dokažte.
3. Dokažte, že každé palindromické číslo se sudým počtem číslic je dělitelné 11.
4. Dokažte, že všechny členy zkoumaných posloupností (s případnou výjimkou prvního členu a_0) jsou násobky devíti.

4. *Najděte všechny kubické rovnice $P(x) = 0$, které mají aspoň dva různé reálné kořeny, z nichž jeden je číslo 7, a které pro každé reálné číslo t splňují podmínku: Jestliže $P(t) = 0$, pak $P(t + 1) = 1$.*

Řešení. Podle zadání má mít kubická rovnice $P(x)=0$ dva různé reálné kořeny, označme je $x_1 = 7$ a $x_2 \neq x_1$ (konkrétní hodnotu $x_1 = 7$ využijeme, jen když to bude vhodné, jinak budeme raději psát obecně x_1). Pro kubický mnohočlen $P(x)$, jehož koeficient u mocniny x^3 označíme a, $a \neq 0$, pak existuje ještě reálné číslo x_3 takové, že platí rozklad

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \tag{1}$$

(nejsou vyloučeny rovnosti $x_3 = x_1$ nebo $x_3 = x_2$).

Připomeňme, jak existenci třetího reálného kořene x_3 zdůvodnit: kubický mnohočlen $P(x)$ je nutně dělitelný mnohočlenem $(x-x_1)(x-x_2)$, příslušný podíl je lineární dvojčlen s vedoucím koeficientem a, tedy dvojčlen $ax+b$, který lze zapsat jako $a(x-x_3)$, zvolíme-li $x_3 = -b/a$.

Naší úlohou je najít všechny vyhovující trojice čísel $a \neq 0$, $x_2 \neq x_1$ a x_3, pro které mnohočlen (1) s danou hodnotou $x_1 = 7$ splňuje pro každé reálné t implikaci $P(t) = 0 \Longrightarrow P(t+1) = 1$. Pro rozbor takové podmínky je nezbytné vědět, pro kolik *různých* hodnot t rovnost $P(t) = 0$ (a tedy i rovnost $P(t+1) = 1$) skutečně platí, tedy kolik je v trojici x_1, x_2, x_3 různých čísel. A priori mohou nastat pouze následující možnosti A, B a C.

A. *x_1, x_2, x_3 jsou tři navzájem různá čísla.*
Tehdy má kubická rovnice $P(x) = 1$ tři navzájem různé kořeny x_1+1, x_2+1, x_3+1, takže platí rozklad

$$P(x) - 1 = a(x-x_1-1)(x-x_2-1)(x-x_3-1).$$

Dosadíme-li sem rozklad (1), dostaneme rovnost mnohočlenů

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) - 1 = a(x-x_1-1)(x-x_2-1)(x-x_3-1). \tag{2}$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^2 na levé a pravé straně obdržíme rovnici

$$-a(x_1+x_2+x_3) = -a(x_1+x_2+x_3+3),$$

která je splněna pouze v případě $a = 0$, což odporuje předpokladu $a \neq 0$. (Navíc rovnost (2) neplatí ani pro $a = 0$, kdy má tvar $-1 = 0$.)

B. $x_1 = x_3 = 7 \neq x_2$.
Tehdy $P(x) = a(x-7)^2(x-x_2)$ a rovnost $P(x) = 1$ musí platit pro $x = 7+1 = 8$ a pro $x = x_2+1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic

$$P(8) = a(8-x_2) = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2+1) = a(x_2-6)^2 = 1.$$

Převrácená hodnota čísla a je tedy rovna jak číslu $8-x_2$, tak číslu $(x_2-6)^2$. Z rovnice

$$8 - x_2 = (x_2-6)^2$$

dostaneme úpravou rovnici $x_2^2 - 11x_2 + 28 = 0$, která má dva kořeny $x_2 = 4$ a $x_2 = 7$. Druhý kořen nevyhovuje naší podmínce $x_2 \neq x_1$, takže nutně platí $x_2 = 4$, odkud $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2(x-4)$.

C. $x_1 = 7 \neq x_2 = x_3$.
Tehdy $P(x) = a(x-7)(x-x_2)^2$ a rovnost $P(x) = 1$ musí platit pro $x = 7+1 = 8$ a pro $x = x_2 + 1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic

$$P(8) = a(8-x_2)^2 = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2+1) = a(x_2-6) = 1.$$

Převrácená hodnota čísla a je tedy rovna jak číslu $(8-x_2)^2$, tak číslu $x_2 - 6$. Z rovnice

$$(8-x_2)^2 = x_2 - 6$$

dostaneme úpravou rovnici $x_2^2 - 17x_2 + 70 = 0$, která má dva kořeny $x_2 = 10$ a $x_2 = 7$. Druhý kořen nevyhovuje naší podmínce $x_2 \neq x_1$, takže nutně platí $x_2 = 10$, odkud $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2$.

Závěr. Podmínkám úlohy vyhovují pouze dvě kubické rovnice

$$\frac{1}{4}(x-7)^2(x-4) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2 = 0.$$

Poznámka. Možnost A v uvedeném řešení můžeme vyloučit díky následující úvaze: Kdyby měl mnohočlen P tři různé kořeny k, l, m, měl by mnohočlen $P-1$ dle předpokladu kořeny $k+1$, $l+1$, $m+1$. To však není možné, protože součet kořenů mnohočlenu P je stejný jako součet kořenů mnohočlenu $P-1$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte všechny mnohočleny P s reálnými koeficienty, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost
$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1) = 2xP(x).$$
[51–A–I–5]
2. Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b, pro které má rovnice
$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$
v oboru reálných čísel právě dvě řešení, přičemž jejich součet je 12. [51–A–III–4]
3. Určete všechny polynomy P, které pro každé reálné číslo x splňují rovnost
$$P(2x) = 8P(x) + (x-2)^2.$$
[50–B–I–5]
4. Nechť P, Q jsou kvadratické mnohočleny takové, že tři z kořenů rovnice $P(Q(x)) = 0$ jsou čísla -22, 7, 13. Určete čtvrtý kořen této rovnice. [49–A–I–1]
5. Nechť $P(x)$ je kvadratický trojčlen. Určete všechny kořeny rovnice
$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$
víte-li, že mezi nimi je číslo 1 a aspoň jeden kořen je dvojnásobný. [49–A–II–1]
6. Najděte všechny dvojice mnohočlenů
$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + d,$$
které splňují tyto podmínky:
(1) Každý z mnohočlenů f, g má dva různé reálné kořeny.
(2) Je-li s libovolný kořen f, je i $g(s)$ kořen f.
(3) Je-li s libovolný kořen g, je i $f(s)$ kořen g. [46–A–I–2]

5. *Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Dokažte, že konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ se stranami délek a, b, c, d (při obvyklém značení) existují, a přitom úhlopříčky každého z nich svírají jeden a týž úhel, právě když platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.*

Řešení. V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme S průsečík úhlopříček a kromě délek stran uvažujme ještě veličiny $e = |AC|$, $f = |BD|$, $e_1 = |AS|$, $e_2 = |CS|$, $f_1 = |BS|$, $f_2 = |DS|$ a $\varphi = |\sphericalangle ASB|$. Podle kosinové věty platí rovnosti

$$\begin{aligned} a^2 &= e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos\varphi, \\ b^2 &= e_2^2 + f_1^2 + 2e_2 f_1 \cos\varphi, \\ c^2 &= e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos\varphi, \\ d^2 &= e_1^2 + f_2^2 + 2e_1 f_2 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Sečteme-li první rovnost s třetí a od výsledku odečteme součet druhé a čtvrté, dostaneme

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2(e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_2 f_1 + e_1 f_2) \cos\varphi,$$

neboli

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2ef \cos\varphi. \tag{1}$$

Odtud plyne takový závěr: platí-li rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, pak v každém uvažovaném čtyřúhelníku je $\cos\varphi = 0$, tedy úhel φ je vždy pravý a délky stran mají vyjádření

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2,\ b^2 = e_2^2 + f_1^2,\ c^2 = e_2^2 + f_2^2,\ d^2 = e_1^2 + f_2^2. \tag{2}$$

Abychom uzavřeli první část řešení, zdůvodníme ještě, že takové čtyřúhelníky (pro jakékoliv délky a, b, c, d splňující vztah $a^2+c^2 = b^2+d^2$) existují. Jistě můžeme předpokládat, že platí $d = \min\{a, b, c, d\}$; délku e_1 pak zvolíme v intervalu $(0, d)$ libovolně a podle (2) určíme

$$\begin{gathered} f_1 = \sqrt{a^2 - e_1^2}, \quad f_2 = \sqrt{d^2 - e_1^2}, \\ e_2 = \sqrt{c^2 - d^2 + e_1^2} \left(= \sqrt{b^2 - a^2 + e_1^2} \right) \end{gathered}$$

(vzhledem k učiněnému předpokladu je $c^2 - d^2 \geqq 0$). Tím je existence vyhovujících čtyřúhelníků (s navzájem kolmými úhlopříčkami) prokázána.

V druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že aspoň jeden konvexní čtyřúhelník $A_0B_0C_0D_0$ se stranami daných délek a, b, c, d existuje; z úvahy o drátěném modelu čtyřúhelníku je jasné, že vyhovujících konvexních čtyřúhelníků $ABCD$ (tvarově blízkých $A_0B_0C_0D_0$) je pak nekonečně mnoho; jejich vnitřní úhly α, γ u vrcholů A, C jsou vázány podmínkou

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 - c^2 - 2bc\cos\gamma \tag{3}$$

(porovnání délky společné strany BD trojúhelníků ABD a BCD). Připusťme, že úhlopříčky všech těchto čtyřhelníků svírají týž úhel φ a že *levá strana rovnosti* (1) *je nenulová* (podle jejího znaménka je úhel φ buď ostrý, nebo tupý, takže se nemůže stát, že pro část vyhovujících čtyřúhelníků má velikost φ_0, a pro ostatní $\pi - \varphi_0$). Pak z rovnosti (1) můžeme vypočítat součin ef, který je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky stejný; ze vzorce pro jejich obsah $S = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$ nakonec plyne, že i hodnota S je jedna a táž. Protože obsah S můžeme vyjádřit i vzorcem $S = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma$, docházíme k závěru: existují takové konstanty R_1 a R_2, že všechny vyhovující čtyřúhelníky splňují vztahy

$$ad\cos\alpha - bc\cos\gamma = R_1, \quad ad\sin\alpha + bc\sin\gamma = R_2$$

(první vztah je důsledkem (3), ve druhém $R_2 = 2S > 0$). Z nich dále vyplývá

$$\begin{aligned}(bc)^2 &= (bc\cos\gamma)^2 + (bc\sin\gamma)^2 = (ad\cos\alpha - R_1)^2 + (R_2 - ad\sin\alpha)^2 = \\ &= (ad)^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2ad(R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha).\end{aligned}$$

Protože $ad \neq 0$, lze z poslední rovnosti vypočítat hodnotu výrazu

$$V = R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha,$$

která je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky $ABCD$ stejná. To je možné jedině tehdy, když $R_1 = R_2 = 0$, a to je spor s tím, že $R_2 > 0$. Důkaz druhé části tvrzení je hotov.

Dodejme, že závěr o hodnotách výrazu V plyne ze známého vyjádření

$$V = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}\sin(\alpha + \omega),$$

kde úhel ω je určen vztahy

$$\sin\omega = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\omega = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Výraz $\sin(\alpha + \omega)$ není konstantní, když se úhel α mění v okolí úhlu α_0 (jenž odpovídá výchozímu čtyřúhelníku $A_0B_0C_0D_0$ z úvodu druhé části řešení).

Návodná úloha:
Ukažte, že $R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha = R\sin(\alpha + \omega)$ pro vhodná R a ω.

6. *Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí*

$$x^2 + y^2 = 2\,005(x - y).$$

Řešení. Odvodíme nejprve, jak vypadá každá dvojice (x, y) přirozených čísel, která vyhovuje rovnici

$$x^2 + y^2 = k(x - y) \tag{1}$$

s daným přirozeným číslem k (a teprve pak všechna tato řešení pro hodnotu $k = 2\,005$ sestrojíme).

Předpokládejme, že (x, y) je libovolné řešení rovnice (1), kterou obvyklým způsobem upravíme do „součinového“ tvaru

$$y(y+k) = x(k-x). \tag{2}$$

Provedeme úvahu o soudělnosti zastoupených činitelů: označme d největší společný dělitel přirozených čísel x a y, takže platí $x = dm$ a $y = dn$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Po vydělení obou stran rovnosti (2) číslem d dostaneme „výhodnější“ rovnost $n(y+k) = m(k-x)$. Z ní totiž vzhledem k nesoudělnosti čísel m, n plyne, že přirozené číslo $y+k$ je násobkem čísla m a číslo $k-x$ stejným násobkem čísla n. Pro vhodné přirozené q tedy platí rovnosti

$$y+k = qm \quad \text{a} \quad k-x = qn.$$

Vyjádřeme odtud dvojím způsobem číslo k a obě vyjádření porovnejme:

$$\left.\begin{aligned} k &= qm - y = qm - dn,\\ k &= qn + x = qn + dm \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ qm - dn = qn + dm \ \Rightarrow\ m(q-d) = n(q+d).$$

Odtud opět z nesoudělnosti čísel m, n plyne, že přirozené číslo $q+d$ je násobkem čísla m a číslo $q-d$ stejným násobkem čísla n. Pro vhodné přirozené r tedy platí rovnosti

$$q+d = rm \quad \text{a} \quad q-d = rn.$$

Jejich sečtením a odečtením dostaneme následující vyjádření čísel q a d pomocí r, m a n:

$$q = \frac{r(m+n)}{2} \quad \text{a} \quad d = \frac{r(m-n)}{2},$$

odkud již pro neznámé x, y dostáváme konečné vzorce

$$x = dm = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = dn = \frac{r(m-n)n}{2}. \tag{3}$$

Zjistěme nyní, jak souvisejí parametry r, m, n s daným koeficientem k z původní rovnice (1). Můžeme postupovat například tak, že odvozené vzorce dosadíme do rovnosti $k = qn + x$:

$$k = qn + x = \frac{r(m+n)n}{2} + \frac{r(m-n)m}{2} = \frac{r(m^2+n^2)}{2},$$

odkud po násobení dvěma dostaneme hledanou podmínku ve tvaru

$$2k = r(m^2+n^2). \tag{4}$$

Jiný způsob odvození rovnosti (4), který je současně přímou „zkouškou“ vzorců (3), spočívá v tom, že z nich snadno plynou vyjádření

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{r^2(m-n)^2(m^2+n^2)}{4},\\ x - y &= \frac{r(m-n)^2}{2}, \end{aligned}$$

ze kterých vidíme, že rovnice (1) je pro taková x, y splněna, právě když je splněna podmínka (4). Než zformulujeme dokázaný výsledek, dodejme ještě, že podle vzorců (3) musejí čísla m, n splňovat nerovnost $m > n$. Proto platí následující věta.

Je-li k dané přirozené číslo, pak řešeními rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ jsou právě ty dvojice přirozených čísel x a y, které jsou tvaru

$$x = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{r(m-n)n}{2},$$

kde r, m, n jsou přirozená čísla, pro něž platí rovnost $2k = r(m^2 + n^2)$, přičemž čísla m a n jsou nesoudělná a $m > n$.

Z dokázané věty plyne recept, jak všechna řešení rovnice $x^2+y^2 = k(x-y)$ pro daný koeficient k sestrojit: uvážíme všechny možné rozklady čísla $2k$ na dva činitele, $2k = rs$, a pro každý z nich pak najdeme vyhovující čísla m, n z rovnosti $m^2 + n^2 = s$. Pak už nezbývá nic jiného, než že pro konečně mnoho čísel m, jež jsou s číslem s nesoudělná a splňují nerovnosti $m^2 < s < 2m^2$, testujeme, zda rozdíl $s - m^2$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Pro dané $k = 2\,005 = 5 \cdot 401$ (401 je prvočíslo) existují tyto rozklady (protože $m^2+n^2 \geqq 2^2+1^2 = 5$, vynecháme rovnou rozklady, v nichž je činitel $s = m^2+n^2$ menší než 5):

(i) $r = 802$, $m^2 + n^2 = 5$. Zřejmě $m = 2$ a $n = 1$, odkud $x = 802$ a $y = 401$.
(ii) $r = 401$, $m^2 + n^2 = 10$. Zřejmě $m = 3$ a $n = 1$, odkud $x = 1\,203$ a $y = 401$.
(iii) $r = 10$, $m^2 + n^2 = 401$. Platí $15 \leqq m \leqq 20$, vyhovuje pouze $m = 20$, kdy $n = 1$, $x = 1\,900$ a $y = 95$.
(iv) $r = 5$, $m^2 + n^2 = 802$. Platí $21 \leqq m \leqq 27$, probereme pouze lichá m, vyhovuje jen $m = 21$, kdy $n = 19$, $x = 105$ a $y = 95$.
(v) $r = 2$, $m^2+n^2 = 2\,005$. Platí $31 \leqq m \leqq 44$, probereme pouze m nesoudělná s číslem 5, vyhovuje jednak $m = 39$, kdy $n = 22$, $x = 663$ a $y = 374$, jednak $m = 41$, kdy $n = 18$, $x = 943$ a $y = 414$.
(vi) $r = 1$, $m^2 + n^2 = 4\,010$. Platí $45 \leqq m \leqq 63$, probereme pouze m nesoudělná s číslem 10, vyhovuje jednak $m = 59$, kdy $n = 23$, $x = 1\,062$ a $y = 414$, jednak $m = 61$, kdy $n = 17$, $x = 1\,342$ a $y = 374$.

Závěr. Úloha má právě osm řešení (x, y). Zapíšeme je v rostoucím pořadí podle první složky x: $(105, 95)$, $(663, 374)$, $(802, 401)$, $(943, 414)$, $(1\,062, 414)$, $(1\,203, 401)$, $(1\,342, 374)$, $(1\,900, 95)$.

Poznámky. Všimněte si, že těchto osm dvojic (x, y) má pouze čtyři různé složky y (každé y je zastoupeno ve dvou dvojicích). To lze vysvětlit takovým pozorováním: má-li pro některé přirozené y kvadratická rovnice

$$x^2 - 2\,005x + (y^2 + 2\,005y) = 0$$

aspoň jedno řešení x v oboru přirozených čísel, má v tomto oboru dvě různá řešení. Snadné vysvětlení plyne z Viètových vzorců: je-li x_1 celočíselný kořen této rovnice, je i druhý kořen $x_2 = 2\,005 - x_1$ celé číslo (různé od x_1); z rovnosti $x_1x_2 = y^2 + 2\,005y$ plyne, že oba kořeny x_1, x_2 mají stejné znaménko, neboť $y^2 + 2\,005y > 0$.

Nechť dvojice (x,y) přirozených čísel je řešením dané rovnice, takže $x > y$. Po úpravě

$$\begin{aligned} 2(x^2+y^2) &= 2\cdot 2\,005(x-y),\\ (x+y)^2+(2\,005-x+y)^2 &= 2\,005^2 \end{aligned} \tag{1}$$

zjišťujeme, že je navíc $0 < x+y < 2\,005$ a $0 < 2\,005-x+y < 2\,005$. Všechna řešení pythagorejské rovnice $X^2+Y^2=Z^2$ dovedeme popsat (viz 6. návodnou úlohu). Odtud plyne další možný postup řešení dané rovnice.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran (tzv. pythagorejské trojúhelníky) s obvodem 990. [35–B–I–3]
2. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že existují dva neshodné pythagorejské trojúhelníky s přeponou délky n. [35–A–I–4]
3. Pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ existuje n navzájem neshodných pythagorejských trojúhelníků se stejným obvodem. Dokažte. [35–A–S–1]
4. Najděte všechny pythagorejské trojúhelníky s přeponou menší než 1 986 a s jednou odvěsnou o 675 menší než přepona. [35–A–II–1]
5. Dokažte, že existuje přirozené číslo k, pro které existuje právě 1 988 různých pythagorejských trojúhelníků s odvěsnou délky k. [38–C–I–5]
6. Ukažte, že všechna řešení pythagorejské rovnice

$$x^2+y^2=z^2$$

dovedeme popsat: trojice (x,y,z) *nesoudělných* přirozených čísel je řešením uvedené rovnice, právě když existují nesoudělná přirozená čísla u, v taková, že $u > v$, uv je sudé a až na případnou výměnu čísel x a y platí rovnosti

$$x=2uv,\ y=u^2-v^2,\ z=u^2+v^2.$$

[Z předpokladu nesoudělnosti plyne, že obě čísla x, y nemohou být zároveň sudá, a z dělitelnosti čtyřmi plyne, že nemohou být ani lichá. Pro sudé x a lichá y, z upravte rovnici do tvaru $(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{2}(z+y)\cdot\frac{1}{2}(z-y)$. Protože činitelé na pravé straně jsou nesoudělná čísla, jejichž součin je druhou mocninou celého čísla, musí být každý z nich druhou mocninou celého čísla. To jsou čísla u a v.]