MoFo úlohy 2024

MATEMATIKA

1. ML Určete obsah kruhu, do kterého je vepsána lomená čára – úsečky, ze kterých je tvořená, jsou na sebe kolmé a mají délky 6, 3 a 1 (viz obrázek).
2. ML Každá stěna pravidelného osmistěnu je označena právě jedním z přirozených čísel od 1 do 8. Pro každou ze stěn Michal spočetl součet čísla na ní napsaného s čísly všech jejích sousedních stěn. Výsledné součty sečetl. Kolik mu mohlo vyjít?
3. ML Radim si vymyslel *krásné* pětimístné přirozené číslo. Pak určil součet *krásného* čísla a poloviny *krásného* čísla, následovně určil součet *krásného* čísla a pětiny *krásného* čísla a nakonec spočetl součet *krásného* čísla a devítiny *krásného* čísla a všechny tři součty ještě sečetl. S nadšením zjistil, že mu vyšla třetí mocnina přirozeného čísla. Určete nejmenší *krásné* číslo, které si Radim mohl vymyslet.
4. ML Radim si vymyslel *nádherné* přirozené číslo. Toto číslo bylo *nádherné*, protože bylo sudé, jeho prvočíselný rozklad obsahoval tři (neřekl nám, jestli různé) činitele a součet všech dělitelů *nádherného* čísla byl roven dvojnásobku *nádherného* čísla. Které *nádherné* číslo Radim vymyslel?
5. ML Kolika způsoby lze k jednotlivým vrcholům krychle (se kterou nebudeme manipulovat) připsat čísla 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 tak, aby součin čísel u libovolných tří vrcholů každé ze stěn krychle byl sudý.
6. ML Na polici je 10 knih, každá má 100 listů a knihomol amonný prožere knihy od prvního listu první knihy do posledního listu poslední knihy. Kolik listů prožere celkem?
7. ML Mějme pravoúhlý trojúhelník OMD, odvěsny mají délky $|MD| = 6, |MO| = 8$. Nad jeho přeponou zvenku sestrojíme čtverec $ODIN$. Jaká je velikost úsečky $|MI|$?
8. ML Vezměme tři po sobě jdoucí lichá čísla a, b, c a uvažme součet $a^2 + b^2 + c^2$ tak, že výsledkem tohoto součtu je čtyřmístné číslo zapsané stejnými číslicemi, např. 7777. Najděte všechny takové trojice lichých čísel a, b, c.

1. ST Najděte nejmenší přirozené číslo (zapsané v desítkové soustavě) s následující vlastností: Přemístíme-li poslední cifru (tj. cifru na místě jednotek) na začátek, dostaneme dvojnásobek původního čísla.
2. ST Je dána elipsa se středem v bodě $S[0,0]$, která má velikost hlavní poloosy 4 cm a velikost vedlejší poloosy 3 cm. Určete maximální hodnotu výrazu $x^2 + y^2$ pro body $[x, y]$ ležící na této elipse.
3. ST Najděte všechny trojice celých čísel (x, y, z), které vyhovují rovnici: $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$
4. ST Je dán pravidelný 66-úhelník. Každému jeho vrcholu přiřadíme číslo 1 nebo −1. Ke každé úsečce spojující jeho dva vrcholy (i úhlopříčky) připíšeme součin čísel v jejích krajních bodech a všechna čísla u těchto úseček sečteme. Určete nejmenší možnou a nejmenší kladnou hodnotu takového součtu.
5. ST . Přirozená čísla od 1 do 121 postupně zleva doprava a shora dolů vepíšeme do čtvercové tabulky. Čtvercovou destičkou 4×4 všemi možnými způsoby zakryjeme právě 16 políček této tabulky. Kolikrát bude součet zakrytých 16 čísel druhou mocninou přirozeného čísla?
6. ST Vytvořte pět obdélníků tak, že délky jejich stran vyberete ze seznamu: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, přičemž každé číslo vyberete právě jednou, a navíc tak, aby se tyto obdélníky bez překrývání daly seskládat do čtverce o velikosti 11x11.
7. ST Pravoúhlý trojúhelník má délky odvěsen 3 a 4. Uvažme tři kružnice, které mají středy ve vrcholech tohoto trojúhelníku a každé dvě z nich mají vnější dotyk. Jaký je poloměr čtvrté kružnice, která má s každou z nich vnější dotyk?
8. ST Určete největší hodnotu, kterou může nabýt součin několika přirozených čísel, jejichž součet je 2024.

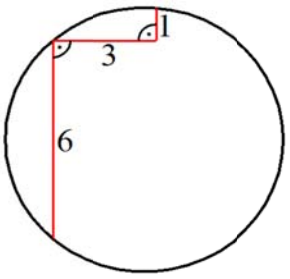
9. ML+ST Vybarvěte přiložené dva obrázky pomocí 4 barev. Mapu ČR buď vybarvěte barvami třemi, nebo dokažte, že to třemi nejde.

FYZIKA

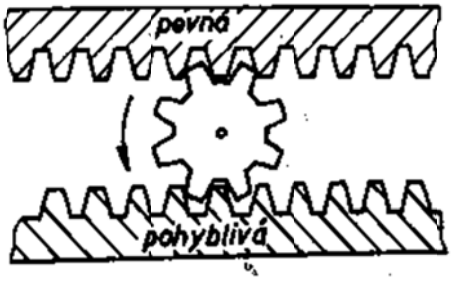
1. ML Ozubené kolo na obrázku se jednou otočí kolem dokola. O kolik cm a jakým směrem se tím posune pohyblivá /spodní/ deska, je-li rozměr zubu kola 10 mm. Jedna deska je pevná, druhá je pohyblivá, viz obrázek.
2. ML Uvažme dva odpory (elektrické), které v sériovém zapojení mají 6x větší celkovou hodnotu odporu než v paralelním zapojení. Jaký je poměr velikostí jejich odporu, tedy $R_2 : R_1 = ?$
3. ML Za jak dlouho obletí letadlo čtverec o délce strany b, jestliže vítr fouká rychlostí o velikosti v_{VZ} a směr větru je rovnoběžný s jednou stranou čtverce? Rychlost letadla za bezvětří (tzn. rychost letadla vůči vzduchu) má velikost v_{LV}.
4. ML Určete velikost náboje, při jehož přenesení z jednoho vodiče na druhý byla vykonána práce $8 \cdot 10^{-5}$ J. Potenciály obou vodičů vůči Zemi jsou -18 V a 62 V.

5. ML Hladina vodojemu je ve výšce 34 m nad Zemí. Jaký hydrostatický tlak je v potrubí vodovodu v 5. poschodí ve výši 15 m při teplotě vody 9°C? Tíhové zrychlení má velikost 9,81 $m \cdot s^{-2}$ a hustotu stanovte podle vztahu $\rho = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$,kde t je teplota ve °C a hodnoty regresních koeficientů jsou uvedeny pomocí základních jednotek soustavy SI: a = 999,84847; b = 6,337563 $\cdot 10^{-2}$; c = -8,523829$\cdot 10^{-3}$; d = 6,943248$\cdot 10^{-5}$; e = -3,821216$\cdot 10^{-7}$. K hodnotám těchto koeficientů doplňte správné jednotky.
6. ML Homogenní těleso celkového objemu V a hustoty ρ plove na hranici mezi mezi dvěma kapalinami o hustotách ρ_1 a ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Určete podíl objemu tělesa v hustší kapalině k celkovému objemu tělesa.

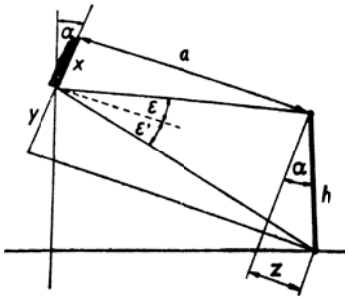
1. ST Přemýšleli jsme nad dalšími nápady pro naše tvůrčí odpoledne na MOFO. Jeden z nápadů byl postavit (co nejvyšší) věž. Jako vhodný stavební materiál jsem si vybral hliníkové plechovky od samozřejmě nealkoholických a nekalorických nápojů: objem 0,5 l, hmotnost cca 20 g, plášť plechovky „tlustý“ 0,2 mm, poloměr plechovky 3 cm. Asi dobrou nápovědou bude fyzikální konstanta mez pevnosti hliníku (v tlaku) 50 MPa. Kolik ideálních plechovek bychom takto (teoreticky) mohli na sebe postavit? Do jaké výšky by případně věž z plechovek sahala? Zvládneme to na příštím MOFO 2025? Plechovky uvažujeme ideální bez vnitřních vad (jsou homogenní) a počasí nám přeje, je bezvětří a ani komár kolem věže neletí.
2. ST S Radimem jsem si sestrojil malý pružinový oscilátor (amplituda 6 cm) a s pomocí pravítka a mobilních stopek jsme změřili, že v první půlperiodě prošlo závaží výchylkou 3 cm dvakrát, v časovém rozdílu $\Delta t = 0{,}001$ s. Jakou frekvenci má náš oscilátor?
3. ST Určete délku x rovinného zrcadla, jehož rovina svírá se svislou stěnou úhel $\alpha = 20°$, aby se v něm viděla celá osoba o výšce 1,8 m (výšku čela a očí zanedejte). Vzdálenost zrcadla od hlavy osoby je $a = 3$ m.
4. ST Velikost tíhové síly korku je 0,147 N, olověného tělíska 1,1074 N. Olověné tělísko spojíme s korkem, zavěsíme na siloměr a ponoříme do kerosinu. Hodnota síly odečtená ze siloměru je 0,588 N. Určete hustotu korku, je-li hustota olova 11,3 g/cm^3 a kerosinu 0,8 g/cm^3.
5. ST Osa otáčení tyče prochází bodem A a je kolmá k nákresně. Tyč se opírá v bodě B o nosnou plochu vozíku. Určete minimální velikost síly, kterou musíme působit ve vodorovném směru na vozík, aby se začal pohybovat doleva nebo doprava. Známe hmotnost tyče m, součinitel statického tření mezi tyčí a nosnou plochou vozíku f a úhel α mezi tyčí a svislým směrem. Zanedbejte valivý odpor a tření v osách kol vozíku. Vozík stojí na vodorovné podložce. Existují takové hodnoty součinitele statického tření a úhlu α, které zabrání pohybu vozíku?
6. ST Na voltmetru je napětí U_1 = 20 V, na zdroji je napětí U_0 = 100 V. Určete podíl elektrického proudu procházejícího voltmerem a pravou částí potenciometru, je-li podíl elektrického odporu levé a pravé části potenciometru 2/3.



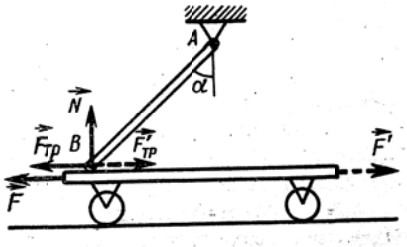
MATEMATIKA 1ML



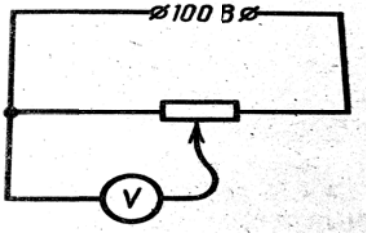
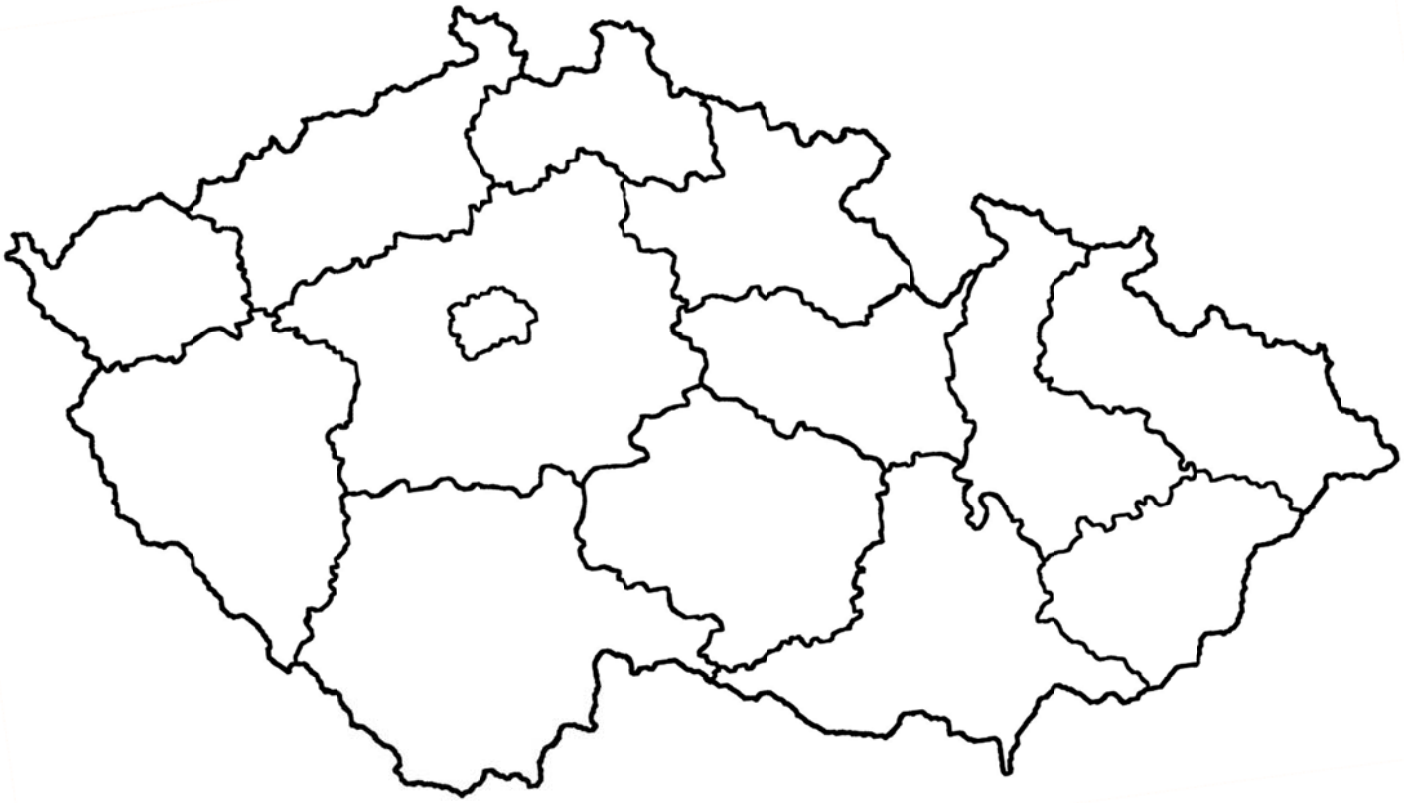
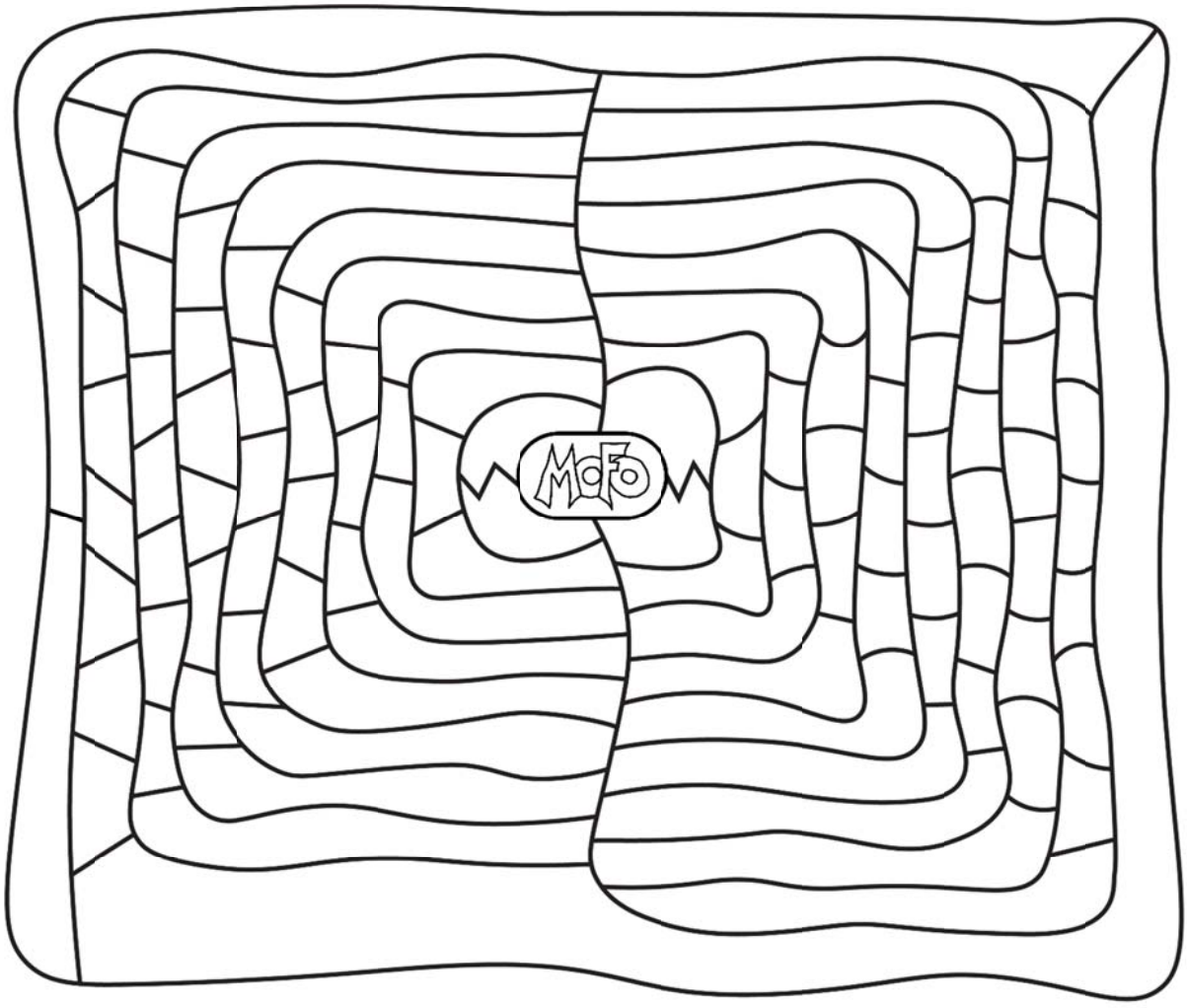
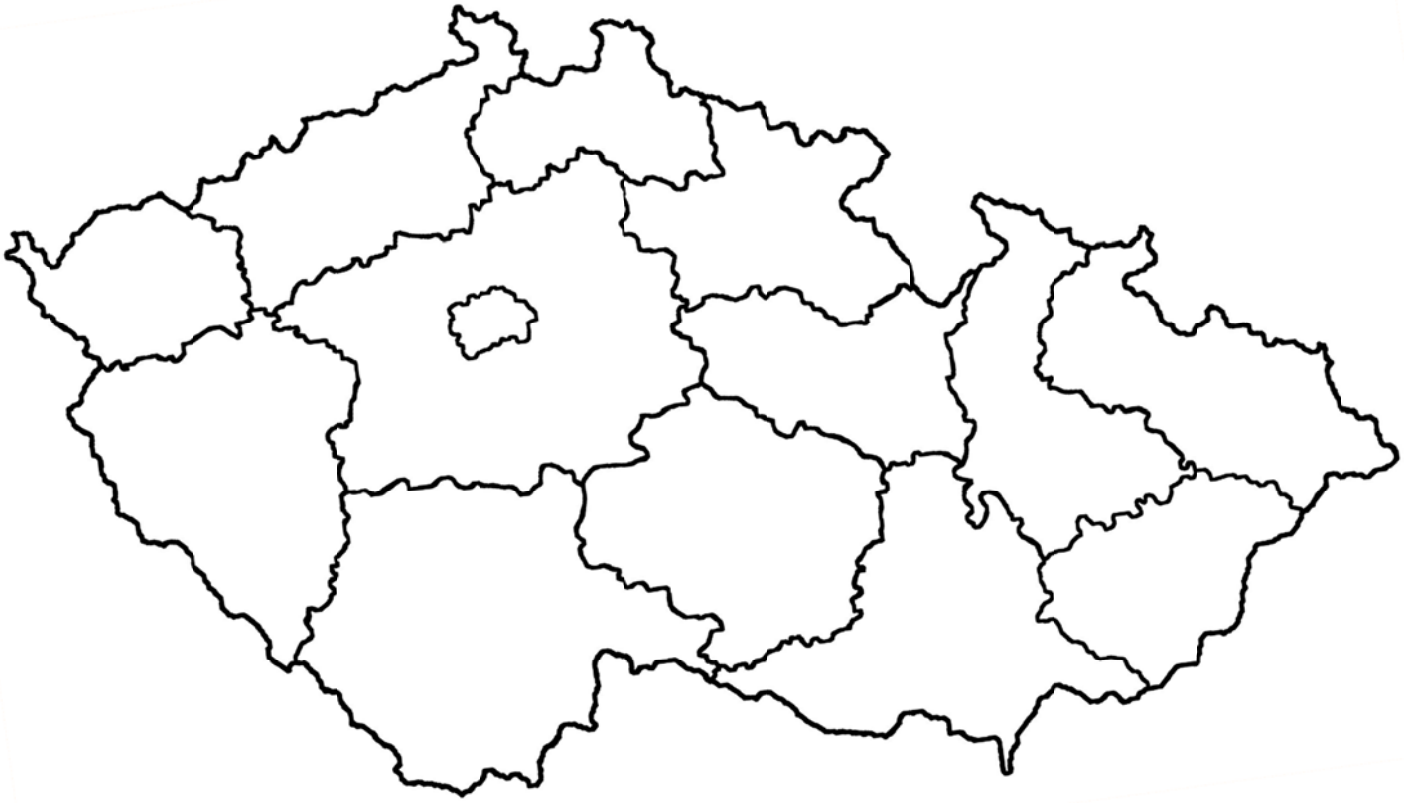
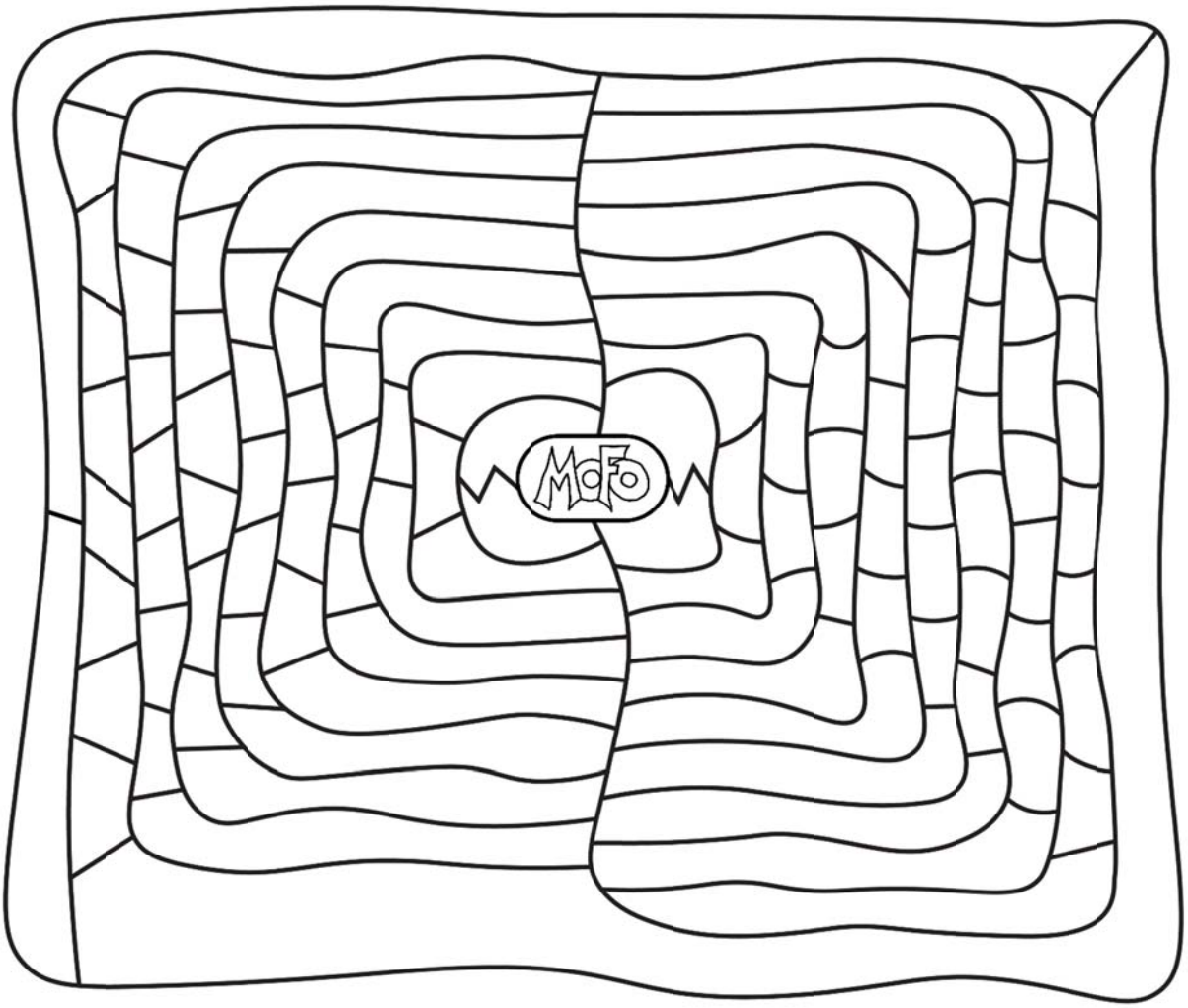
FYZIKA 1ML



FYZIKA 3ST



FYZIKA 5ST



FYZIKA 6ST