ÚLOHY – MoFo 2023

MATEMATIKA

1. ML V pětiúhelníku známe délky 4 stran a velikosti 3 úhlů (viz obrázek). Vypočtěte délku páté strany. Výsledek zapište přesně (nezaokrouhlujte).
2. ML Najděte alespoň jeden pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $a, b \in \mathbb{N}$, jehož přepona má délku 2023 (viz obrázek).
3. ML Jaké číslice by měly být umístěny místo nul na třetím a pátém místě v čísle 3 000 003, abychom dostali číslo dělitelné 13? Nalezněte všechna řešení.
4. ML Každým vrcholem čtyřstěnu daného objemu V je nakreslena rovina rovnoběžná s protější plochou čtyřstěnu. Vypočítejte objem čtyřstěnu tvořeného těmito rovinami v závislosti na objemu V.
5. ML V uvedeném výrazu, který obsahuje všechna přirozená čísla do 600, chybí levá závorka. Doplňte jí tak, aby vyšel výsledek 378: $1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+\cdots+595+596+597-598-599-600)$.
6. ML Je dán čtyřúhelník $ABCD$, bod P je průsečík úhlopříček čtyřúhelníku, body N, M leží na úsečce AC a platí: $|\mathrm{AP}|=|\mathrm{PN}|=|\mathrm{NM}|=|\mathrm{MC}|$, body K, L leží na úsečce BD a platí: $|BL|=|LK|=|KP|=|PD|$. Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$.
7. ML Vystřihněme si obdélník, který pak přehneme podél jedné jeho úhlopříčky s délkou 10 cm. Měřením jsme zjistili, že vzdálenost zbývajících dvou vrcholů obdélníku po přeložení je 6 cm. Jaký je obsah celého obdélníku?
8. ML Uvažme čtyřúhelník $KLMN$, kde $|KL|=6$ cm, $|LM|=8$ cm, $|MN|=11$ cm, $|LN|=14$ cm, $|KM|=11$ cm. Ve vnitřní oblasti čtyřúhelníku zvolíme bod X, aby součet $|KX|+|LX|+|MX|+|NX|$ byl co nejmenší. Jaké je minimum tohoto součtu a toto minimum dokažte.
9. ML Máte sestrojenou kružnici. Popište, jak pouze pomocí pravítka a kružítka najdete střed této kružnice. Nezapomeňte uvést argument, že je vaše řešení správné.
10. ML Na jednom břehu řeky stojí u člunu člověk, který má u sebe vlka, kozu a hlávku zelí. Jeho úkolem je přepravit vše přes řeku, ovšem do člunu se k němu vždy vejde jen jedna věc. A navíc nesmí nechat spolu samotnou kozu a zelí, protože by nehlídaná koza zelí sežrala, ani spolu nesmí nechat samotné vlka a kozu, protože nehlídaný vlk by sežral kozu. Úkolem je vymyslet, jak to má provést.
11. ML Pro která přirozená čísla n lze rozdělit čtverec na n čtverců (které se nesmějí překrývat a musí pokrýt celý původní čtverec, ale nemusí být stejně velké)? Například pro $n=4$ to jde (viz obrázek).
12. ML (a) Bylo vyloupeno skladiště, pachatel (pachatelé) odvezli lup autem. Policie zadržela tři podezřelé, Petra, Radima a Michala. Nikdo jiný do loupeže zapojen nebyl. Po výslechu se zjistily tyto dvě skutečnosti: i) Michal se nikdy nepouští do akce bez Petra. ii) Radim neumí řídit auto. *Je Petr vinen*?
(b) Totéž co za (a), ale zjistilo se: i) Petr pracuje vždycky aspoň s jedním společníkem. ii) Michal je nevinen. *Je Radim vinen*?

1. ST Najděte poslední dvě cifry čísla $2023^{\left(2023^{2023}\right)}$ zapsaného v desítkové soustavě.
2. ST Najděte polynom s celočíselnými koeficienty, který má kořen $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.
3. ST V Michalově klobouku se nachází 7 karet. Na n-tém listu je napsáno číslo 2^n-1 ($n=1,2,\ldots,7$). Karty losujeme náhodně, dokud součet nepřesáhne 124. Jaká je nejpravděpodobnější hodnota tohoto součtu?
4. ST V množině reálných čísel řešte soustavu rovnic: $x^2+y^2+z^2=19^2$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$; $x-y+z=11$.
5. ST Je dána funkce $f(x)=t|x-2|-3|x-t|+5x+44$. Najděte, pro která $t \in \mathbb{R}$ má $f(x)$ maximum rovné 0.
6. ST V lichoběžníku $ABCD$ platí $|AB|=8$ cm, $o=28$ cm, $AB \perp BC$, Thaletova kružnice sestrojená nad stranou AB se dotýká strany CD. Určete délky stran lichoběžníku, je-li strana AB a) základnou, b) ramenem daného lichoběžníku.
7. ST Uvažme tupoúhlý trojúhelník ABC, kde úhel ACB má velikost 150°. Označme P průsečík osy úhlu při vrcholu B a strany AC. Nový bod Q ležící na straně AB zvolme tak, aby velikost úhlu QCB byla 120°. Vypočítejte velikost úhlu QPB.
8. ST Označme $[a]$ celou část reálného čísla a. Z definice víme, že $[a] \leq a < a+1$. Např. $[8{,}08]=8$; $[8{,}88]=8$; $[88]=88$. Jaké řešení má pak v R^+ rovnice $a \cdot \big[a \cdot [a \cdot [a]]\big]=88$?
9. ST K dispozici jsou tři nádoby. Jedna osmilitrová, která je plná vody, jedna pětilitrová a jedna třílitrová. Úkolem je rozdělit osm litrů vody na poloviny, a to na co nejmenší počet přelévání.
10. ST Tři misionáři a tři kanibalové jsou na jedné straně řeky a mají k dispozici jednu loďku, která uveze jednoho nebo dva lidi. Úkolem je najít způsob přepravy všech šesti lidí na druhou stranu řeky tak, aby nikdy na žádném břehu nebyla přesila kanibalů nad misionáři.
11. ST Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že když ze šachovnice s rozměry $2^n \times 2^n$ odebereme jedno (libovolné) políčko, tak je možné ji pokrýt dlaždicemi ve tvaru „L“ sestávajícími ze tří políček (viz obrázek).

12. ST Pro která přirozená čísla n lze rozdělit čtverec na n obdélníků s poměrem stran 2:1 (které se nesmějí překrývat a musí pokrýt celý původní čtverec, ale nemusí být stejně velké)? Například pro $n = 2$ to jde (viz obrázek).

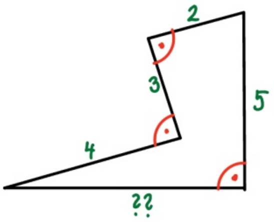
FYZIKA

1. ML Při sestupu z Kamenitého se Radim rozhodl zvážit kámen, na který narazil. Jako správný fyzik se nespokojil s obyčejnou váhou, ale sestrojil důmyslné zařízení, viz obrázek. Použil k tomu dvě pevné kladky, kousek lana, vyvažovací tyč délky 4 m, v jejímž středu uvázal lano. Na levou stranu uvázal dva dvoulitrové sáčky s vodou, vzdálenost mezi nimi je 40 cm. Kámen zjišťované hmotnosti nakonec umístil 120 cm od pravého konce tyče tak, aby se tyč vyvážila. Hmotnost tyče uvažte 3 kg. Jakou hmotnost kamene Radim takto zjistil?
2. ML Na letním táboře se zaměřením na fyziku si táborníci sestavili důmyslné chladící zařízení v tůňce potoka. Na jednom konci prkna AB umístili nádobu s nápojem tak, že byla celá pod vodou, na druhý konec umístili nějaký kámen. Prkno podložili v jedné třetině. Hmotnost nádoby je přibližně 6 800 g a její (vnější) objem je 5 litrů. V jedné třetině (bod K) pak prkno podepřeli. Jakou hmotnost měl kámen, který táborníci použili, aby soustava byla v rovnováze?
3. ML Železný drát hmotnosti m je ohnut ve své polovině do pravého úhlu a je uchycen na závěsu (viz obr.). Určete úhel mezi vertikálou a horní částí drátu, je-li drát v rovnovážné poloze v homogenním tíhovém poli Země.
4. ML Tahová síla reaktivního motoru je 39 kN, rychlost plynů opouštějících trysku 2600 $m \cdot s^{-1}$. Určete hmotnost plynů procházejících tryskou za dobu 2 s.
5. ML Deska o délce $l = 2$ m a hmotnosti 60 kg je opřena o stěnu a svírá s podlahou úhel α. Součinitel smykového tření mezi deskou a podlahou je $f_1 = 0{,}4$, mezi deskou a stěnou $f_2 = 0{,}5$. Určete nejmenší úhel α, při kterém deska ještě nesklouzne a vypočtěte tlakovou sílu, kterou deska působí na podlahu a stěnu.
6. ML Letadlo letí rovnoměrně přímočaře z místa A do místa B a pak se ihned vrací zpátky do místa A. Velikost rychlosti letadla vzhledem k povrchu Země za bezvětří je v. Určete průměrnou velikost rychlosti pro tyto dva případy: a) vítr vane podél úsečky AB stále stejným směrem, b) vítr stále vane ve směru kolmém k úsečce AB. Velikost rychlosti větru vzhledem k povrchu Země je vždy u.
7. ML Poloměr černé díry R závisí na její hmotnosti M, gravitační konstantě G a rychlosti světla c podle vzorce $R = 2M^{\alpha}G^{\beta}c^{\gamma}$. Určete α, β a γ jen ze znalosti jednotek zmíněných veličin.
8. ML Stojíme u rovných kolejí. Chceme přes ně přejít, proto se nejdříve podíváme doleva. Vidíme tramvaj, která se k nám blíží konstantní rychlostí v. Poté se podíváme doprava. Vidíme protijedoucí tramvaj, která se k nám blíží konstantní rychlostí u. V jejím rovném čelním skle si všimneme odrazu první tramvaje. Jakou rychlostí se k nám tento odraz přibližuje?

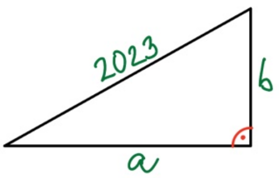
1. ST Při sestupu z Kamenitého se Radim rozhodl zvážit kámen, na který narazil. Jako správný fyzik se nespokojil s obyčejnou váhou, ale sestrojil důmyslné zařízení, viz obrázek. Použil k tomu dvě pevné kladky, kousek lana, vyvažovací tyč délky 4 m, v jejímž středu uvázal lano. Na levou stranu uvázal dva dvoulitrové sáčky s vodou, vzdálenost mezi nimi je 40 cm. Kámen zjišťované hmotnosti nakonec umístil 120 cm od pravého konce tyče tak, aby se tyč vyvážila. Jakou silou Radim působil v bodě P na lano, aby celou soustavu udržel? Hmotnost tyče uvažte 3 kg.
2. ST MOFO zprávy: „Hlavní vedoucí Petr při tradičním fotbale účastníků proti vedoucím vsítil v posledních sekundách zápasu rozhodující a opět vítězný gól. Parametry střely – vzdálenost od branky 25 m, míč proletěl těsně nad hlavami bezradných táborníků stojící ve zdi (řekněme ve výšce 190 cm nad zemí) pod šibenici (standardní fotbalové branky). Nádherná podívaná.“ Jakou rychlostí Petr vykopl míč? Míč považujte za hmotný bod, odpor prostředí neuvažujte a další potřebné údaje si vyhledejte.
3. ST Na vodivou kouli poloměru r_1 je přiveden náboj Q. Tuto kouli spojíme vodičem s druhou vodivou koulí poloměru r_2. Určete náboje na obou koulích po dosažení rovnovážného stavu.
4. ST V Dewarově nádobě se uchovávají $V = 2$ l kapalného dusíku při teplotě $t_1 = -195$ °C. Za dobu $\tau_1 = 24$ h se v Dewarově nádobě vypařila polovina hmotnosti kapalného dusíku. Stanovte skupenské teplo vypařování dusíku, jestliže jsme zjistili, že při teplotě $t = 0$ °C ve stejné nádobě za dobu $\tau_2 = 22{,}5$ h roztaje $m_l = 40$ g ledu. Teplota okolního vzduchu je $t_2 = 20$ °C, hustota kapalného dusíku $\rho = 800\ kg \cdot m^{-3}$, skupenské teplo tání ledu dusíku $l_t = 3{,}3 \cdot 10^5\ J \cdot kg^{-1}$. Rychlost přenosu tepla z okolního prostředí do Dewarovy nádoby je přímo úměrná rozdílu teplot mezi vnitřkem nádoby a okolním prostředím.
5. ST Mějme homogenní těleso tvaru válce o poloměru R. Podél jeho osy symetrie je vyvrtána dutina tvaru válce o poloměru $R/2$, jejíž osa je vzdálena od osy tělesa o $R/2$. Válec s dutinou leží na vodorovné podložce, jejíž jednu stranu pomalu zvedáme (viz obr.). Určete maximální úhel sklonu desky, při kterém se ještě nebude válec s dutinou po desce pohybovat.

6. ST Dvě pružiny s tuhostmi k_1 a k_2 jsou spojeny sériově i paralelně (viz obr.). Určete tuhost jedné pružiny, která by je v obou případech nahradila tak, aby pozorované kmitání tělesa bylo stejné.
7. ST Vojta ráno zaspal a uvědomil si, že má začít přednášet za 10 sekund. Pokud však nedoběhne včas, začne přednášet dochvilný Michal. V pokusu o záchranu své přednášky proto vyběhl z pokoje se zrychlením $a = 0{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, přesně v polovině cesty si ale uvědomil, že to nestíhá, proto zvýšil své zrychlení na $2a$. Jakou rychlostí vrazil do dveří, které se zrovna Michal chystal zavřít?
8. ST Za sebou v řadě se nachází velké množství kuliček o poloměru $r = 1$ cm s rozestupy $d = 5$ cm mezi jejich středy. Každá z kuliček má hmotnost $m = 20$ g a rameno valivého odporu $\xi = 0{,}6$ mm. První kuličce udělíme počáteční rychlost $v = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ tak, že začne docházet k řetězovým srážkám (ve středech kuliček). Kolikátá kulička bude tou poslední, která se pohne? Všechny srážky jsou dokonale pružné a kuličky neprokluzují.

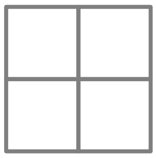
OBRÁZKY K ÚLOHÁM



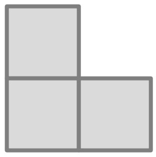
MAT 1ML



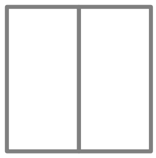
MAT 2ML



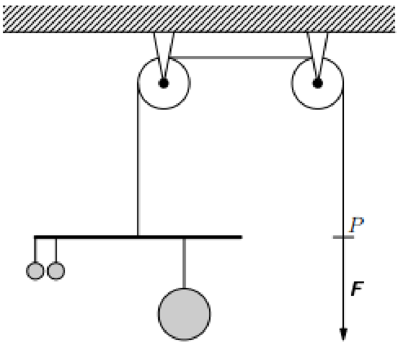
MAT 11ML



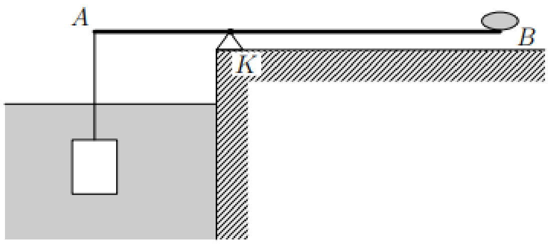
MAT 11ST



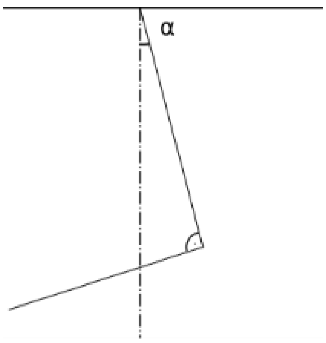
MAT 12ST



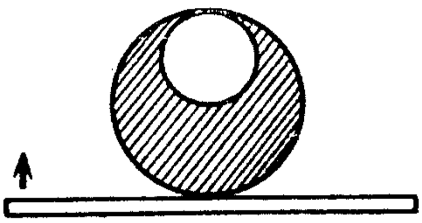
FYZIKA 1ML, 1ST



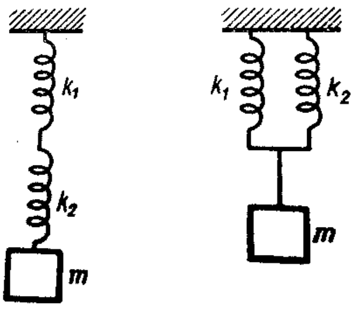
FYZIKA 2ML



FYZIKA 3ML



FYZIKA 5ST



FYZIKA 6ST