

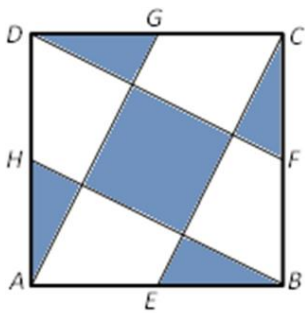
MATEMATIKA

1. ML Je dán čtverec  $ABCD$ . Označme postupně  $E, F, G, H$  středy stran  $AB, BC, CD, AD$ . Určete, kolik procent obsahu čtverce  $ABCD$  tvoří vybarvená část (viz obr.).
  2. ML Radima v 5 hodin ráno probudilo jedno číslo ze spaní. Proto si ho hned po pěti minutách vyznačil na číselnou osu. Po pěti hodinách si na číselnou osu vyznačil číslo o 5 větší a v pět hodin odpoledne tam přidal ještě pětinasobek původního čísla. Tím získal na číselné ose body  $R_1, R_2, R_3$ , pro jejichž vzdálenosti platí:  $|R_1R_2| = 8, |R_2R_3| = 6$ . Zjistíte, které číslo Radima probudilo?
  3. ML Jakou část obsahu obdélníka zabírá kosočtverec  $KLMN$  (viz obr.)?
  4. ML Test obsahuje 26 otázek, které jsou podle obtížnosti rozděleny do tří částí. V první je každá správná odpověď za 3 body, ve druhé za 5 bodů a ve třetí za 8 bodů. Maximálně je možné získat 111 bodů. Kolik otázek může být v jednotlivých částech testu?
  5. ML S použitím sekačky je možné posekat louku o 3 hodiny rychleji než ručně. Louku začali sekat 2 pracovníci ručně. Po 39 minutách se k nim přidal třetí pracovník se sekačkou. Všichni 3 takto pracovali ještě další 1 hodinu, než louku dosekali. Určete, za jak dlouho by celou louku ručně posekal jeden pracovník.
  6. ML V oboru přirozených čísel najděte všechna řešení rovnice  $xy = x + y + 2022$ .
  7. ML Jeden a půl slepice snese jeden a půl vejce za jeden a půl dne. Kolik snesou dvě slepice za dva dny?
  8. ML Máme dva knoty, z nichž každý po zapálení jednoho z konců shoří za hodinu (ale neznámými rychlostmi). Jak lze pomocí těchto knotů odměřit tři čtvrtiny hodiny?
  9. ML Uvažte všechna přirozená čísla dělitelná šesti, která jsou menší nebo rovna než 2022. Určete jejich součet.
  10. ML Mějme libovolný konvexní čtyřúhelník, jehož obsah je  $147 \text{ cm}^2$ . Rozdělme jej úhlopříčkami na 4 trojúhelníky. Průsečík úhlopříček dělí jednu úhlopříčku v poměru 5:2, druhou v poměru 4:3. Určete obsahy těchto čtyř trojúhelníků.
1. ST Zadáni vychází z úlohy 1 ML, ale pro body  $E, F, G, H$  pouze platí, že  $E \in AB, F \in BC, G \in CD, H \in DA$ . Vyjádřete procentuální podíl vybarvené části čtverce v závislosti na úhlu  $\alpha \in \langle 0, 45^\circ \rangle$ , jestliže  $|\alpha| = |\sphericalangle ABH| = |\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle DAG| = |\sphericalangle BCE|$ . Zjistíte, pro kterou velikost úhlu  $\alpha$  je obsah vybarvené části minimální.
  2. ST Na obrázku je velký čtyřúhelník rozdělený na čtyři menší se společným vrcholem  $K$ . Ostatní označené body rozdělují strany velkého čtyřúhelníku vždy na tři stejné části. Čísla udávají obsahy příslušných malých čtyřúhelníků. Jaký je obsah vybarveného čtyřúhelníku?
  3. ST Mějme tři různé nenulové číslíčky. Sestavme z nich všechna možná trojčiferná čísla (každá z číslic se v každém z nich opakuje právě jednou) a seřaďme je podle velikosti od nejmenšího po největší. O které číslíčky se jedná, víme-li, že třetí číslo je aritmetickým průměrem druhého a posledního čísla.
  4. ST Zjistíte, jakých hodnot může nabývat výraz  $V = \frac{a+b}{a^2+b^2}$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a platí  $a+b \geq 1$ .
  5. ST Náhodně vybereme tři (reálná) čísla z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet nepřesáhne dvojku?
  6. ST Určete, pro které  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  nabývá výraz  ${}^{22}\sqrt{x} - {}^{21}\sqrt{x}$  svého maxima. Zajímá nás přesný výsledek (nikoliv zaokrouhlené desetinné číslo).
  7. ST Na obrázku (viz níže) je půdorys jednoho domu a dveře, schematicky znázorněné přeškrtnutím. Otázka zní: Lze projít každými dveřmi právě jednou (za předpokladu, že nelze procházet zdí ani levitovat ...)?
  8. ST Na kružnici je umístěno 5 tětív, které nemají společné krajní body. Jaká je pravděpodobnost, že se alespoň jedna dvojice tětív protne?
  9. ST Čtyřstěn  $ABCD$  má délky hran  $|AB| = a, |CD| = c$  a středy hran  $AB, CD$  mají vzdálenost  $d$ . Mezi takovými čtyřstěny najděte ten, který má největší objem a objem určete.
  10. ST Uvažme všechny permutace/pořadí přirozených čísel  $1, 2, \dots, 10$ . Obecně jej můžeme zapsat  $(n_1, n_2, \dots, n_{10})$ . Kolik takových pořadí splňuje podmínku, že  $n_i > n_{2i}$  pro  $1 \leq i \leq 5$  a  $n_j > n_{2j+1}$  pro  $1 \leq j \leq 4$ .

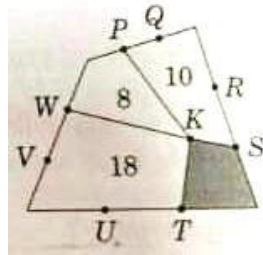
FYZIKA

1. ML Jakou minimální rychlostí musí projet lyžařka bodem  $B$ , aby se dostala na vrchol terénní nerovnosti (bod  $A$ ) tvaru části koule? Jestliže lyžařka sjíždí z terénní nerovnosti a projede bodem  $B$  rychlostí o velikosti  $8 \text{ m/s}$ , jakou rychlost musí mít v bodě  $A$ ? Hmotnost lyžařky s výstrojí a výstrojí je  $70 \text{ kg}$ , tíhové zrychlení  $10 \text{ m/s}^2$ , poloměr zakřivení terénní nerovnosti  $28 \text{ m}$ , úhel  $\alpha = 20^\circ$ . Zanedbejte působení odporových sil.
  2. ML Vozík má přepravit náklad za nejkratší možnou dobu přímočarým pohybem mezi dvěma místy vzdálenými od sebe o  $L$ . Vozík se může pohybovat rovnoměrně zrychleně a rovnoměrně zpomaleně, ale také rovnoměrným přímočarým pohybem. Velikost zrychlení  $a$  je během zpomalování ale i zrychlování stejná. Na začátku a také na konci pohybu je vozík v klidu. Odvoďte vztah pro maximální rychlost vozíku za uvedených podmínek.
  3. ML Na dně přehrady se nachází betonová konstrukce (viz obr.). Hloubka vody v přehradě je  $H$ . Jak velkou silou působí konstrukce na dno přehrady? Hustota betonu je  $\rho$ , vody  $\rho_0$ .
  4. ML Těleso padající volným pádem urazí v poslední sekundě  $1/3$  celkové dráhy. Určete dobu volného pádu a výšku, ze které těleso spadlo. Zanedbejte odpor vzduchu a počítejte s hodnotou tíhového zrychlení  $10 \text{ m/s}^2$ .
  5. ML Uvažme paletový vysokozdvíhací vozík, viz obrázek. Podle údajů výrobce má hmotnost  $2,22 \text{ t}$ , vzdálenost jeho těžiště od osy přední nápravy je  $763 \text{ mm}$ , vzdálenost čela nosných vidlic od osy přední nápravy je  $421 \text{ mm}$ , délka vidlic  $770 \text{ mm}$ . Vozík naložíme paletou tak, že nic z vozíku ani vidlic nepřesahuje a náklad je rovnoměrně rozprostřen. Jaká je hraniční čelní nosnost vozíku, aby se při zvednutí nepřeklopil směrem dopředu?
  6. ML Na obrázku je znázorněna soustava dvou kladek a dvou nějakých břemen o hmotnostech  $m_A$  a  $m_B$ . Na počátku je soustava v klidu. Hmotnost kladek ani závěsů neuvažujte. Kdy se bude břemeno  $B$  pohybovat dolů? Pro hmotnosti  $m_A = 1 \text{ kg}$  a  $m_B = 3 \text{ kg}$  určete sílu, kterou závěs působí na těleso  $B$ .
- 
1. ST Je dán graf závislosti  $x$ -ové souřadnice rychlosti částic, které konají rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb podél osy  $x$ . Pohyb obou částic začíná v počátku osy  $x$ . Necht' jsou dány časy  $t_1$  a  $t_2$ . Určete okamžik  $t_3$ , ve kterém se částice setkají. Nakreslete pro obě částice graf závislosti jejich  $x$ -ové souřadnice na čase.
  2. ST Na kladce jsou zavěšena závaží o hmotnostech  $M$ . Na jednom závaží je navíc položeno těleso o hmotnosti  $m$ . Určete velikost síly, kterou působí těleso hmotnosti  $m$  na závaží hmotnosti  $M$ . Stanovte velikost síly, kterou je namáhána osa kladky.
  3. ST Ke galvanometru, který má vnitřní odpor  $R_1$  je paralelně připojen rezistor odporu  $R_2$ . Před galvanometr je zařazen rezistor odporu  $R$  a voltmetr. Je-li na voltmetru zobrazena hodnota napětí  $1 \text{ V}$ , vychýlí se ručička galvanometru o jeden dílek. Jak musíte změnit odpor  $R$ , aby se ručička galvanometru vychýlila o jeden dílek při napětí  $10 \text{ V}$ ?
  4. ST Na vzduchovou vrstvu mezi dvěma skleněnými destičkami dopadá kolmo bílé světlo. Které vlnové délky viditelného světla nejsou obsaženy v odraženém světle, je-li tloušťka vzduchové vrstvy  $0,9 \mu\text{m}$ ?
  5. ST Na obrázku je znázorněna soustava dvou kladek a dvou nějakých těles  $A, B$  o hmotnostech  $m_A$  a  $m_B$ . Na počátku je soustava v klidu. Hmotnost kladek ani závěsů neuvažujte. Určete, které břemeno se bude pohybovat nahoru a které dolů. Pro hmotnosti  $m_A = 1 \text{ kg}$  a  $m_B = 3 \text{ kg}$  určete síly  $F_A$  a  $F_B$ , kterými závěsy působí na tělesa. S jakým zrychlením se tělesa pohybují?
  6. ST Na obrázku je zapojení čtyř rezistorů. Pokud spínač  $S$  sepneme nebo vypneme, tak se odpor soustavy rezistorů nezmění. Určete odpor  $R_x$  čtvrtého rezistoru.

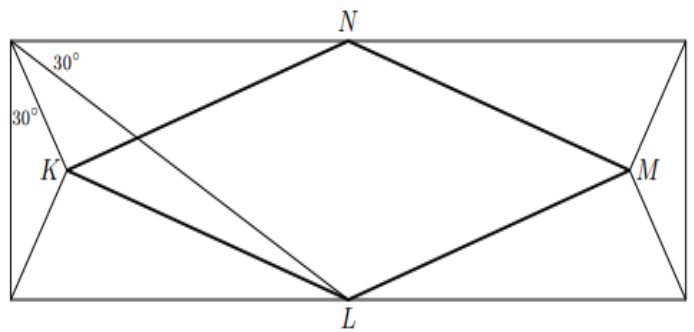
Obrázky k úlohám - MATEMATIKA



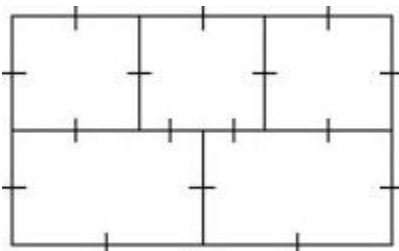
1ML/ST



2ST

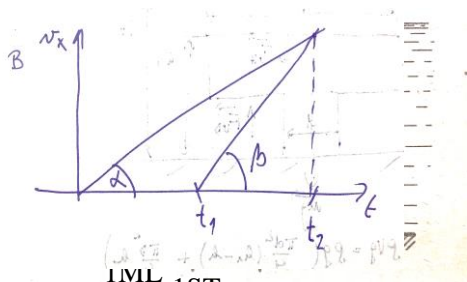


3ML

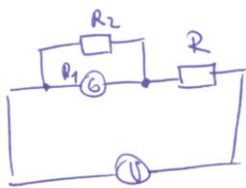


7ST

Obrázky k úlohám – FYZIKA



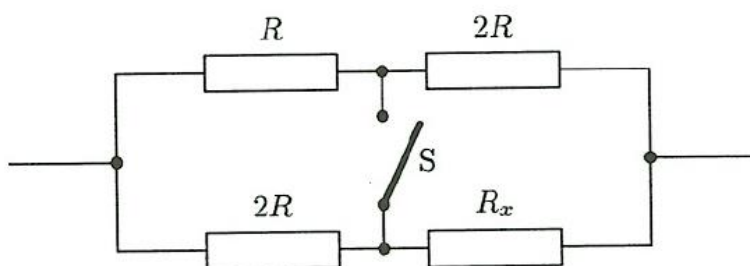
1ML 1ST



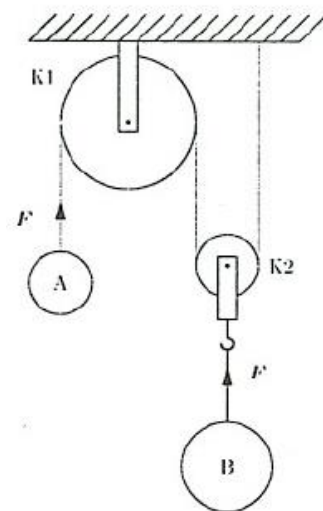
3ST



5ML



6ST



6ML/5ST