

MATEMATIKA

- ML Radim chce převést devět kouzelných zvířátek o hmotnostech 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10 kg ve třech kufrech - tři zvířátka v každém. Každý kufr musí vážit méně než 20 kg. Pokud je váha jakéhokoli zvířátka dělitelná vahou jiného zvířátka ze stejného kufu, budou bojovat. Jak má Radim rozdělit zvířátka do kufrů, aby mezi sebou nebojovaly?
- ML Najděte nejmenší přirozené číslo n , pro které je výraz $n^2 + 22n + 21$ dělitelný číslem 2021.
- ML Je dán trojúhelník ABC , ve kterém $AC = BC = 5$, $v_a = 4$. Vypočítejte velikost výšky v_c .
- ML Škola uspořádala pro svých 300 studentů tři výlety. Každého z nich se zúčastnil stejný počet studentů. Každý student absolvoval alespoň jeden výlet, ale polovina účastníků prvního výletu, třetina účastníků druhého a čtvrtina třetího výletu jela pouze na jednu z cest. Kolik studentů se zúčastnilo každé cesty? Kolik účastníků první cesty se zúčastnilo druhé cesty a kolik z nich se zúčastnilo třetí cesty?
- ML Trojúhelník je rozdělen na 4 části (viz obrázek). Obsahy tří menších trojúhelníků jsou 2, 5 a 6. Vypočítejte obsah zbývajících částí.
- ML Najděte největší přirozené číslo n , které není dělitelné číslem 10 a má následující vlastnost: Vyškrtneme-li v dekadickém zápisu čísla n první dvě cifry, dostaneme číslo, které je 17x menší než číslo n .
- ML Podle jedné středověké sbírky úloh byly na soše bohyně Pallas Athény vyryty tyto informace: „Já, Pallas jsem stvořena z ryzího zlata, jež poskytlo pět velkorysých básníků. Kariseus dal polovinu; Thespian osminu; Solon dal desetinu; Themison dal dvacetinu. A zbývajících devět talentů zlata daroval dobrý muž Aristodokos.“ Kolik socha vážila celkem? [*Talent* je jednotka hmotnosti, odpovídá přibližně jednomu kilogramu.]
- ML Pokud koblihu na obrázku rozříznete třemi příjímými řezy, kolik kusů může maximálně vzniknout? (Mezi jednotlivými řezy nelze kusy přemísťovat.)
- ML Na metr dlouhé tyči leze 10 mravenců. Každý z nich leze rychlostí 1 cm za vteřinu. Když do sebe dva narazí, odrazí se a pokračují opačným směrem. Když mravenec dorazí na konec tyče, tak z ní spadne dolů. Jak máme tyto mravence rozmístit, aby poslední z nich spadl co nejpozději? A jak dlouho po rozmístění to bude?
- ML Jaký objem bude mít směs, která vznikla smícháním jednoho litru 100% ethanolu a jednoho litru 100% vody? Pro jednoduchost předpokládejme, že hustota roztoku ethanolu s hmotnostní koncentrací $x \in (0, 1)$ je $(-87x^2 - 117x + 994)$ kg/m³.
- ML Je dána kružnice $k_1(S_1; r_1 = 5 \text{ cm})$ a její dva body A, B tak, aby že úhel AS_1B je pravý. Vepišme do vzniklého čtvrtkruhu kružnici k_2 se středem S_2 tak, aby se dotýkala poloměrů S_1A a S_1B i kruhového oblouku \widehat{AB} . Konstrukci proveďte. Dále vypočítejte obsah geometrického útvaru U ohraničeného úsečkami S_2A, S_2B a kruhovým obloukem s krajními body A, B .
- ML Radim a Petr si o prázdninách sjednali v Dolní Lomné na určitý počet dní brigádu za 75 Kč na hodinu. Petr chtěl původně chodit jen na menší počet hodin, Radim by tak denně pracoval o 5 hodin více. Pak se rozhodli, že budou chodit spolu na stejný počet hodin. To ovšem způsobilo, že Radim si vydělal o 3600 Kč méně, než plánoval, Petr si naopak o 900 Kč polepšil. Kolik dní chodili pracovat a o kolik hodin více oproti plánu Petr denně pracoval?

- ST Najděte všechna řešení následující soustavy rovnic v oboru celých čísel.

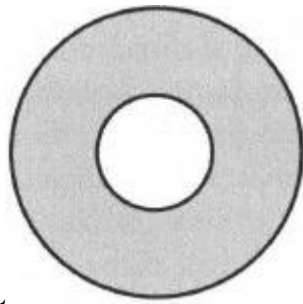
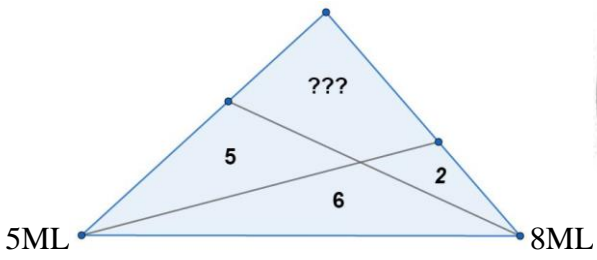
$$\begin{aligned} ab + cd &= 2021 \\ ac + bd &= 2021 \\ ad + bc &= 2021 \end{aligned}$$
- ST V prostoru je dán obdélník $ABCD$ a bod M , který neleží v rovině určené body obdélníku. Vypočítejte vzdálenost bodů M a D , jestliže $|MA| = 6$, $|MB| = 5$, $|MC| = 2$.
- ST Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y , pro které platí $x^y = y^{x-y}$.
- ST Pro vnitřní úhly trojúhelníku ABC platí: $\sin \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$. Určete vztah mezi stranami a, b, c takového trojúhelníku.
- ST Najděte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která je hodnota výrazu $\frac{\lfloor x^{2021} \rfloor}{\lfloor x \rfloor^{2021}}$ největší. Kromě toho nalezněte i onu maximální hodnotu. *Zápisem $\lfloor x \rfloor$ přitom rozumíme dolní celou část čísla x . To znamená, že $\lfloor x \rfloor$ je největší celé číslo, které není větší než x .*
- ST Najděte nejmenší číslo $p \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + 2y^2 \leq p(x^2 + xy + y^2)$.
- ST Najděte množinu všech hodnot reálného parametru p , pro které má rovnice $2021^x = px$ právě jedno (reálné) řešení.

8. ST Každé pole magického čtverce obsahuje jiné číslo a součet v každém řádku, sloupci a uhlopříčce je 15 (viz obrázek). Vaším úkolem je najít čtverec, který splňuje uvedené podmínky, ale obsahuje číslo 8 nahoře uprostřed.
9. ST Znamý anglický hádankář Henry Ernest Dudeney si všiml, že zlomek $91 \frac{5742}{638}$ je roven 100 a v jeho zápise je každá z číslic 1-9 použita právě jednou. Nalezl deset dalších způsobů, jak výsledku dosáhnout, a v jednom z nich stojí před zlomkem pouze jedna číslice. O které řešení se jedná?
10. ST Kolik vody musíme dolít do jednoho litru 65% slivovice, aby obsah ethanolu klesl na 51%? A jaký bude objem výsledného nápoje? (Procenta jsou hmotnostní, pro jednoduchost předpokládejme, že hustota alkoholu s hmotnostní koncentrací $x \in (0, 1)$ je $(-87x^2 - 117x + 994) \text{ kg/m}^3$.)
11. ST Při cestě z Lačnova zpět k našemu ubytování řešíme každý rok fleky na silnici. Zřejmě od slimáků, které přejelo auto. Ještě žijící slimák Michal po sobě zanechal na silnici stopy slizu, viz obrázek. Několikadenní práce. Nyní odpočívá v jednom rohu obrazce, BÚNO A. Chce se co nejrychleji přemístit do bodu B a proto se pohybuje jen v rámci stávajících stop po slizu, viz obrázek. Kolik cest nejkratší délky spojující tyto dva rohy má Michal k dispozici?
12. ST Na přeponě AB pravouhlého trojúhelníku ABC je dán bod M takový, že kružnice vepsané trojúhelníkům CAM a BCM mají stejný poloměr. Rozhodněte, co je větší: obsah trojúhelníku ABC , nebo obsah čtverce o straně $|CM|$?

FYZIKA

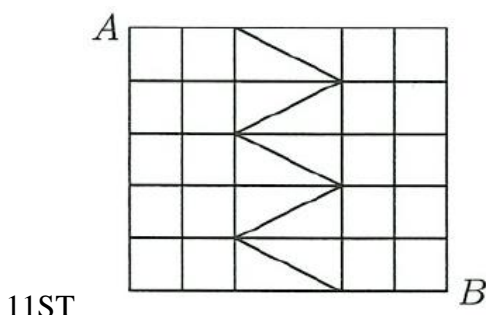
1. ML Kolo o průměru 165 mm se otáčí s frekvencí $f_1 = 12,4 \text{ s}^{-1}$ a pomocí řemenového převodu pohání kolo o průměru 850 mm. Určete rychlost pohybu řemenu a převodový poměr $i = f_1/f_2$.
 2. ML Kámen byl vržen svisle vzhůru a dosáhl výšky 19,6 m za dobu 2 s. Při druhém vrhu dosáhl stejné výšky za dobu 4 s. O kolik procent je větší velikost počáteční rychlosti kamene u prvního vrhu než u vrhu druhého? ($g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$)
 3. ML Benzínový motor spotřebuje za 1 h 9 litrů benzínu. Jaký vnitřní průměr přívodního potrubí zvolíme, aby rychlost proudění benzínu byla $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$?
 4. ML Jak se změní odpor drátu, který při nezměněné hmotnosti pětkrát prodloužíme? Řešte jako podíl odporu prodlouženého drátu a odporu původního drátu.
 5. ML Na rovné přímé dálnici se předjíždějí dva kamióny s přívěsem každý o délce 20 m. Jeden jede rychlostí 85 km/h a druhý rychlostí 90 km/h. Předjížděcí manévr začíná i končí, je-li jejich vzdálenost 5 m.
 6. ML Balon o hmotnosti 500 kg byl naplněn 600 m^3 helia. Jaká je nosnost balonu, je-li hustota vzduchu $1,20 \text{ kg/m}^3$ a helia $0,18 \text{ kg/m}^3$.
1. ST Účinný průřez zachytu termálních neutronů pro izotop ^{113}Cd je 20 000 b. Průměrná atomová hmotnost přírodního kadmia je 112 u a jeho hustota je $8,64 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Jaká část tepelných neutronů ze svazku je absorbován kadmiovým plíškem o tloušťce 0,2 mm? Abundance izotopu ^{113}Cd v přírodním kadmii je 12 %.
 2. ST Stojíte ve vzdálenosti D od zdroje vysílajícího zvukové vlny do všech směrů stejně. Když se přemístíte o 50 m blíže, zjistíte, že se intenzita vln zdvojnásobila. Vypočtete původní vzdálenost D .
 3. ST První vagón vlaku projel kolem pozorovatele za 1 s, druhý za 1,5 s. Délka každého vagónu je 12 m. Určete velikost zrychlení a počáteční rychlosti vlaku. Pohyb vlaku je přímočarý a velikost zrychlení je konstantní.
 4. ST Varná konvice obsahuje dvě spirály. Použijeme-li první, voda na čaj se ohřeje za 2 min, jestli použijeme-li druhou, za 4 min. Určete doby ohřevu vody, jsou-li spirály zapojeny do série a paralelně. Ve všech případech ohříváme stejné množství vody ze stejné počáteční teploty vody a varné konvice.
 5. ST Laserová tiskárna HP LaserJet 1200 má rozlišení 1200 dpi. V jaké vzdálenosti oka od výtisku se již projeví jeho bodová struktura?
 6. ST V následující části obvodu (viz obrázek) uvažte odpor jednotlivých rezistorů R . Určete odpor mezi body A, B , přičemž poslední část obvodu je nekonečná.

ÚLOHY – **MoFo** 2021



8ST

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |



6ST - FYZIKA

