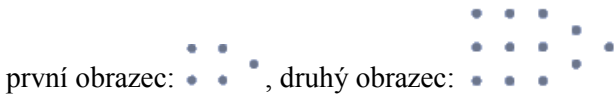


MATEMATIKA

1. ML Mějme danu posloupnost obrazců, které vznikají přidáváním kroužků následujícím způsobem

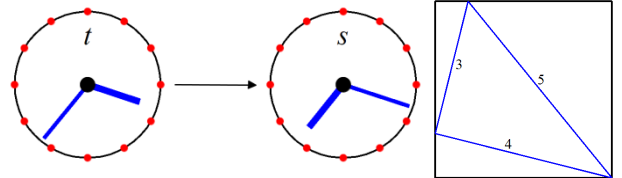


první obrazec: \bullet , druhý obrazec: $\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \bullet \\ \bullet & & \bullet \end{matrix}$, Z kolika kroužků se bude skládat devátý obrazec?

2. ML Ve stodole jsou husy, krávy a mouchy. Zvířat je 17 a dohromady mají 74 nohou. Kolik hus, krav a much může ve stodole být? Zkuste najít všechny možnosti.
3. ML Michal říká o Radimovi: Nyní jsem dvakrát starší, jako byl Radim, když jsem byl stejně starý, jako je Radim teď. Až bude Radim stejně starý, jako jsem teď já, bude nám dohromady 63 let. Kolik je jim nyní let?
4. ML Na počátku je plná nádoba o obsahu 9 litrů a dvě prázdné po 8 litrů a 2 litry. Na konci máme mít v největší nádobě 4 litry, v prostřední 3 litry a v nejmenší 2 litry tekutiny. (a) Na kolik přelití toho lze dosáhnout? (b) Kolik přelití by bylo třeba a jaký obsah by byl v jednotlivých nádobách, kdyby výsledná množství – 4 litry, 3 litry a 2 litry – mohla být v nádobách rozdělena libovolně?
5. ML

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

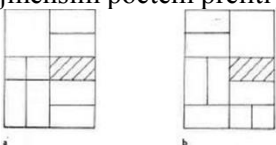
 Na pozicích 1,2 jsou bílé figurky, na pozicích 4,5 černé (pozice 3 je prázdná). Černé a bílé figurky si mají vzájemně vyměnit místa. Povolené tahy: figurkou lze táhnout na sousední volné pole anebo jí přeskočit sousední figurku na další volné pole. Najděte postup s minimálním počtem tahů.
6. ML Na klasických analogových hodinách (ručičky se pohybují spojitě) je v čase t malá (hodinová) ručička mezi trojkou a čtyřkou, zatímco velká (minutová) ručička je mezi sedmičkou a osmičkou. Za nějakou dobu (v čase s) se poloha ručiček vymění (viz obrázek). Určete, kolik bylo hodin v čase t i v čase s (zaokrouhlete na sekundy a zapište ve tvaru hh:mm:ss).



7. ML Do čtverce je vepsán trojúhelník o stranách 3, 4 a 5 (viz obrázek). Určete obsah tohoto čtverce.
8. ML Je číslo tvořené pomocí 3^n jedniček dělitelné 3^n ? (Například pro $n = 2$ by otázka zněla, zdali je 111 111 111 dělitelné $32 = 9$.)
9. ML Představme si pokoj ve tvaru krychle a housenku, která sedí v jednom rohu na podlaze. Chce se dostat na opačný roh pokoje/krychle. Lézt může jen po podlaze, stěnách a stropě. (a) Jakou cestou se má vydat, aby urazila co nejkratší vzdálenost? (b) Kolik takových cest existuje?
10. ML Na čtverečkováný papír jsme položili tutéž housenku, nechali ji volně pohybovat a v pravidelných časových intervalech jsme zaznamenávali její polohu (viz obrázek). (a) Jakou vzdálenost housenka ulezla mezi 60. a 80. sekundou? (b) Jakou vzdálenost housenka ulezla mezi 100. a 120. sekundou (zakřivený úseky dráhy je potřeba nějak přesně změřit)? (c) Jakou celkovou dráhu housenka ulezla? (d) Mezi kterými dvěma měřeními lezla housenka nejvyšší rychlostí, a tuto rychlost určete. (e) Jaká byla průměrná rychlost při celém pohybu housenky na našem papíře?

1. ST Karolínka pošeptala Michalovi krásné přirozené číslo n . Michalovi se číslo velice líbilo, protože vypočítal, že 4^n a 5^n začínají v desítkové soustavě stejnou cifrou. Vy zjistěte jakou (najděte všechny možnosti).
2. ST Radim, který chodí vždy konstantní rychlostí, dováděl v obchodním centru a zjistil, že po směru jízdy ujde na eskalátoru 15 kroků a proti směru jízdy 35. Náhle došlo k poruše. Kolik kroků ušel Radim na stojícím eskalátoru?
3. ST Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y , které jsou řešením soustavy rovnic
- $$\begin{cases} 2x + y = |x + y| - 1 \\ x + 2y = |x - y| + 1 \end{cases}$$

4. ST Na obrázku jsou tři nádoby. Kanystr o obsahu 20 litrů, který je na počátku plný, a dále vědro o obsahu 17 litrů a plechovka tvaru rotačního válce s obsahem 12 litrů. Obě menší nádoby jsou na počátku prázdné. Pouze přeléváním máme dostat ve dvou nádobách po 7 litrech a ve třetí nádobě 6 litrů. Jakým způsobem a co nejmenším počtem přelití je možné tento úkol zvládnout? Je to vůbec možné?



5. ST. Hlavořam – vysvětlí Jirka.

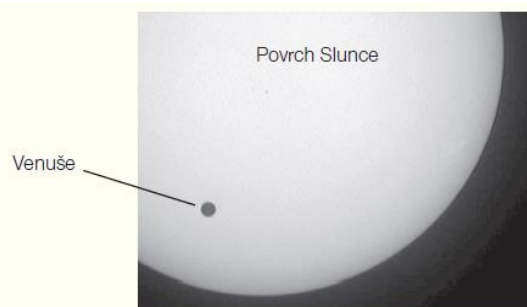
6. ST Najděte všechna $x \in (0, \pi)$, pro která platí $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{1}{8}$.

7. ST V trojúhelníku ABC známe délky výšek. Konkrétně $v_a = 2$, $v_b = 3$, $v_c = 4$. Vypočítejte obsah tohoto trojúhelníku.

8. ST Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC. (a) Necht' máme navíc bod K na straně AB. Nalezněte bod L na straně BC a bod M na straně AC tak, aby byl obvod trojúhelníku KLM co nejmenší. (b) Nalezněte body K, L a M na stejných stranách jako v bodu (a) tak, aby byl obvod trojúhelníku KLM co nejmenší.
9. ST Dokažte, že každé reálné číslo (jako třeba $\frac{22}{7}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nebo π) lze vyjádřit jakou součet konečně mnoha čísel tvořených pouze ciframi 0 a 7 (třeba 7.007 nebo 0.007007700777...).
10. ST Základem rulety je otáčivé zařízení tvořené dvěma soustřednými koly, z nichž větší je nehybné a menší se otáčí. Vnitřní (francouzské) kolo má 37 políček očíslovaných od 0 do 36; políčko s číslem 0 je zelené, ostatní jsou střídavě červená a černá. Po uvedení kuličky krupiérem do pohybu kulička postupně zpomaluje a usadí se na jednom z políček. Umístěním žetonů na herní plán hráč sází na to, kde kulička zůstane. Vsadí-li například x Kč na černé políčko a kulička na něm skončí, získá zpět svou sázku a k tomu navíc x Kč (a řekneme, že je sázka vyplacena v poměru 1:1). (a) Jaká je pravděpodobnost výhry při sázce na červenou barvu? Jaký bude náš očekávaný zisk, vsadíme-li 10 Kč na červenou barvu? (b) Existuje strategie, jež budí zdání, že hráči zaručí mírný zisk. Jedna z nich spočívá ve zdvojnásobení sázky: hráč vsadí jednotku na barvu; v případě prohry vsadí na stejnou barvu dvě jednotky, pak 4, 8, 16, 32, ..., dokud nevyhraje. Uvažme sázku 1 Kč. Kolik vyhraje v šestém kole? Kolik vyhraje v n -tém kole?

FYZIKA

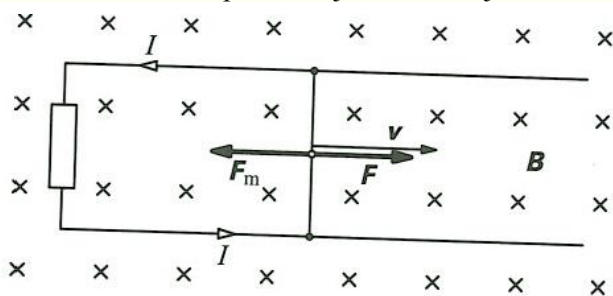
1. ML Určete mechanickou energii proudové stíhačky o hmotnosti 15 tun, která letí ve výšce 10 km rychlostí 1260 km/h. Jaká je hmotnost paliva o výhřevnosti $4,19 \cdot 10^7$ J/kg, které bylo spotřebováno k dosažení popsaného pohybového stavu při účinnosti motoru 4 %? Nulová hladina gravitační potenciální energie je na povrchu Země, odpor vzduchu zanedbáváme.
2. ML Vzdálenost Uranu od Slunce je přibližně dvacetkrát větší než vzdálenost Země od Slunce. Hmotnost Uranu je přibližně čtrnáctkrát větší než hmotnost Země. Určete poměr sil, kterými Slunce přitahuje Uran a Zemi.
3. ML Letadlo letící rychlostí 1440 km/h vypustilo raketu ve směru letu. Motor rakety začal pracovat v okamžiku oddělení rakety od letadla a byl v činnosti po dobu 40 s. Za posledních 6 s uletěla raketa dráhu 24,6 km. Vypočtete střední velikost zrychlení rakety během zmíněné doby 40 s a její rychlost vzhledem k letadlu v okamžiku zhasnutí motoru. Předpokládejme rovnoměrně zrychlený pohyb rakety během činnosti motoru.
4. ML Balón o objemu 200 m^3 je ve výšce h_1 , kde je hustota vzduchu $0,735 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určete hmotnost zátěže, kterou je třeba vyhodit z balónu, aby vystoupil do výšky h_2 , kde je hustota vzduchu $0,525 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
5. ML Dva silní muži, například Petr a Radim, nesou na svých ramenech dřevěný hranol dlouhý 6 m. Petr podpírá hranol na jeho konci. Jak daleko od druhého konce podpírá trám Radim, tlačí-li trám na jeho rameno silou o 50 % větší než na rameno Petra?
6. ML Ve středu 6. června 2012 bylo možné z mnoha míst na Zemi sledovat, jak se planeta Venuše přesouvá přes Slunce. Tento zajímavý úkaz se nazývá „přechod“ Venuše přes Slunce a dochází k němu vždy, když se Venuše na své oběžné dráze dostane mezi Slunce a Zemi. K dalšímu přechodu dojde až po 105-ti leté přestávce. Na obrázku je přechod Venuše zachycen. Dalekohled byl nasměrován na Slunce a obraz se promítal na bílý papír. (a) Proč byl přechod Venuše pozorován promítáním obrazu na bílý papír? (b) U kterých dalších planet je možné ze Země pozorovat jejich přechod přes Slunce? (c) Je možné takto pozorovat přechod Saturnu přes Slunce? Kde a kdy? Svě odpovědi zdůvodněte.



1. ST Automobil se rozjíždí z klidu po vozovce, která tvoří oblouk poloměru $R = 100$ m. Pohyb automobilu začíná v místě, jehož poloha je popsána úhlem $\alpha = 30^\circ$ (úhel mezi svislou přímkou procházející nejvyšším bodem oblouku a spojnicí místa startu automobilu se středem oblouku). Jakou maximální rychlostí může automobil vyjet na horizontální úsek vozovky, je-li koeficient statického tření koly a povrchem vozovky $f = 0,3$?
2. ST Po vnitřní straně pláště kužele, který se pohybuje vzhůru podél své osy symetrie se zrychlením o velikosti a , obíhá kulička po kružnici poloměru R . Určete periodu T tohoto pohybu kuličky. Úhel při vrcholu kužele má velikost 2α .
3. ST Na koncích tyče délky l a zanedbatelné hmotnosti jsou umístěny malé kuličky o hmotnostech m_1 a m_2 ($m_1 > m_2$). Středem tyče kolmo na tyč prochází pevná osa, kolem které může bez odporu rotovat. Tyč je uvedena do vodorovné polohy a poté spuštěna. Vyjádřete úhlovou rychlost, kterou tyč s kuličkami má při průchodu rovnovážnou polohou.
4. ST Kovový disk poloměru 10 cm, který je orientován kolmo k magnetické indukci o velikosti 1 T vnějšího homogenního magnetického pole, rotuje podél osy kolmé k disku a procházející jeho středem s frekvencí 100 s^{-1} . Dva

kontakty, jeden ve středu disku, druhý na jeho obvodu, spojují disk s rezistorem odporu $5\ \Omega$. Určete Jouleovo teplo uvolňované na rezistoru.

5. *st* Mějme ve vzdálenosti 10 cm od sebe dva rovnoběžné vodiče zanedbatelného odporu. Na jedné straně jsou vodiče spojeny rezistorem o odporu $4,0\ \Omega$. Působením vnější síly se po těchto vodičích pohybuje konstantní rychlostí $2,0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ další vodič zanedbatelného odporu a délky 10 cm. Celá tato soustava je v magnetickém poli o indukci $0,5\ \text{T}$, její vektor je kolmý k rovině vodičů (viz tradiční obrázek).

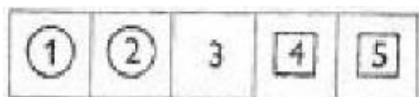


(a) Jaké napětí se indukuje na koncích pohybujícího se vodiče? (b) Jaký indukovaný proud prochází obvodem a jaký je jeho (elektrický) výkon? (c) Příčný vodič je ale současně vodičem s proudem v magnetickém poli, na který působí magnetická síla a vnější síla tuto sílu překonává. Jak velkou silou tedy musí působit vnější síla na příčný vodič a jaký je její výkon?

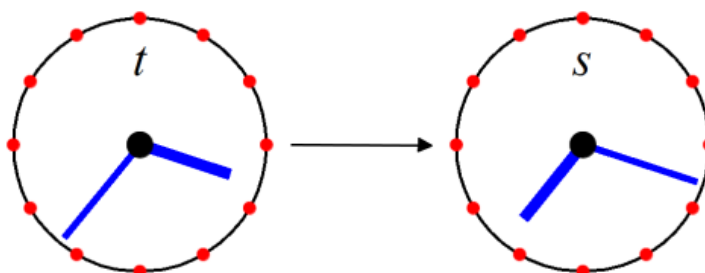
6. *st* Pozorovatel je vzdálen $1,8\ \text{m}$ od bodového zdroje světla s výkonem $250\ \text{W}$. Vypočítejte efektivní hodnoty elektrického a magnetického pole. Porovnání těchto hodnot budí zdání, že jedna ze složek elmag. vlny je „silnější“. Je tato myšlenka správná? Svě tvrzení zdůvodněte a podpořte výpočtem energií elektrického a magnetického pole (obou složek) této vlny.

OBRÁZKY

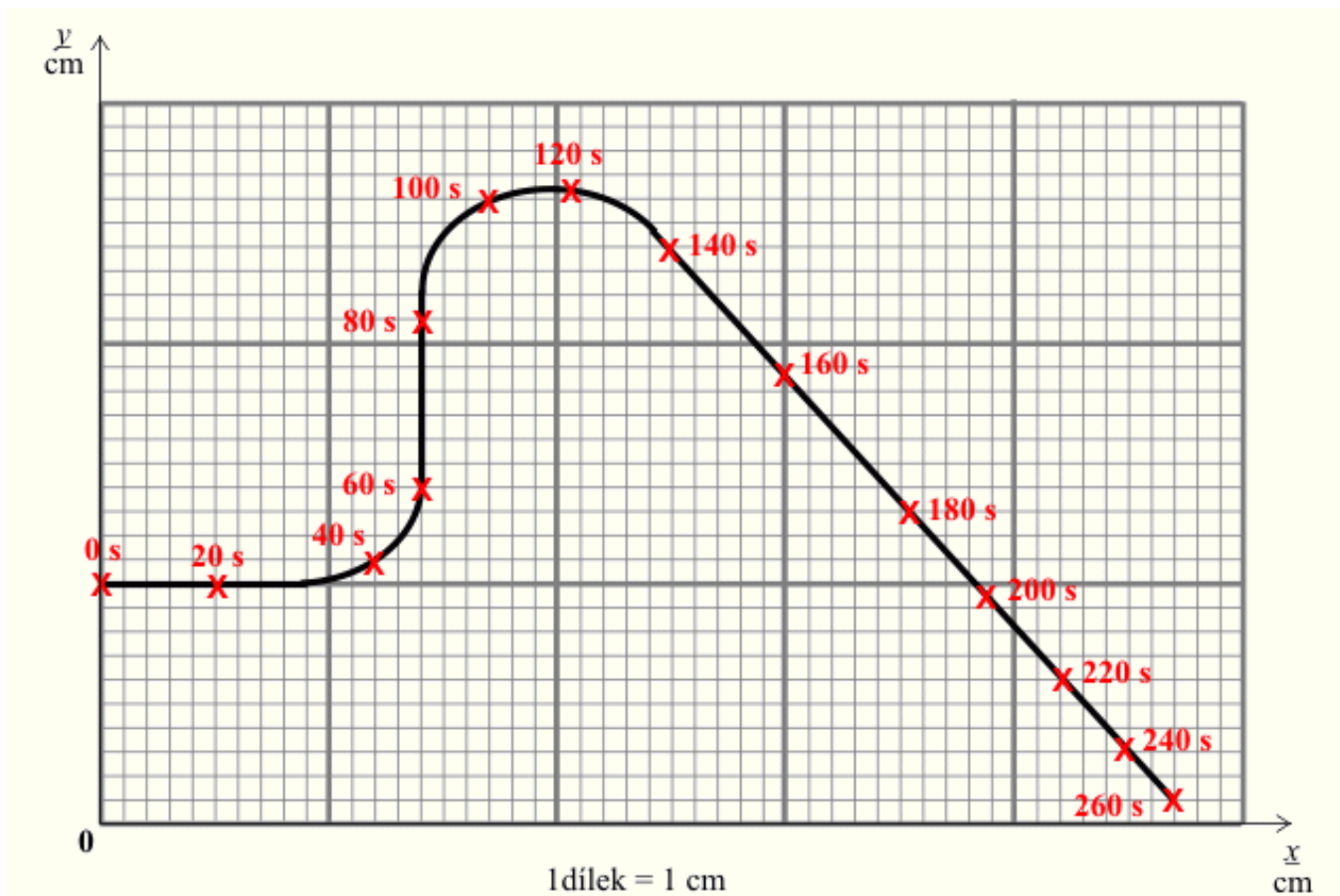
5 ML



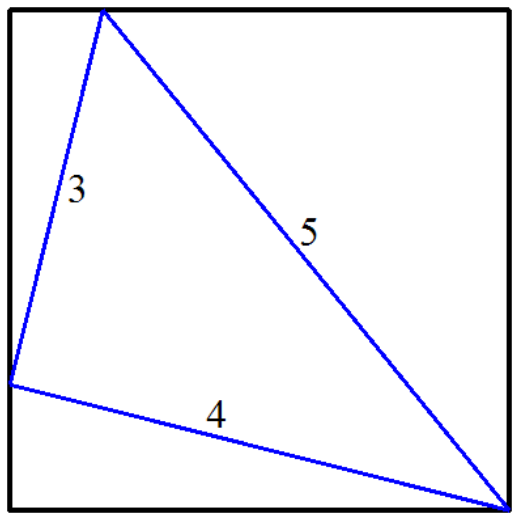
6 ML



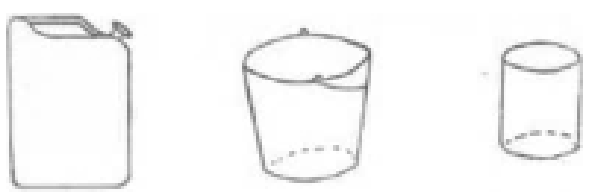
10 ML



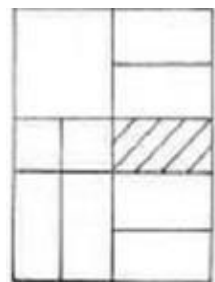
7 ML



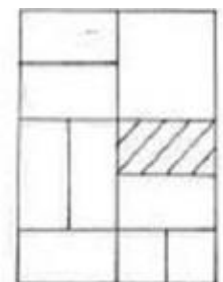
4 ST



5 ST



a



b