

Návody k úlohám domácí části I. kola 59. ročníku MO kategorie B

Soutěžní úloha 1

Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2 009, ve druhé 2 010 a v poslední 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápalce. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru.

NÁVODNÉ ÚLOHY

- 1.1. V misce je 100 bílých a 110 černých kuliček. Hráč může v každém svém tahu odebrat jednu bílou nebo jednu černou nebo jednu bílou spolu s jednou černou kuličkou. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Vyhrává ten, po jehož tahu zůstane miska prázdná. Popište vítěznou strategii pro některého hráče.

ŘEŠENÍ.

Podívejme se na celou hru od konce, tedy od posledního tahu a všimněme si, které možnosti vedou k výhře a které vedou k prohře hráče.

Označme si (a, b) momentální pozici hry, kde a bude označovat zbývajících počet bílých a b zbývajících počet černých kuliček.

Zanechá-li některý hráč po svém tahu pozici $(0,1)$, $(1,0)$ nebo $(1,1)$, pak prohrává. Podobně hráč dopadne, zanechá-li po svém tahu pozici $(1,2)$ nebo $(2,1)$ (protihráč hru posune do pozice $(0,2)$ nebo $(2,0)$).

Pozice, kterou musí hráč zanechat aby vyhrál je tedy $(2,2)$, případně $(2,0)$ nebo $(0,2)$ – tím donutí protihráče k jedné z proherních pozic z předchozího odstavce. K některé z těchto pozic se hráč může dopracovat, pokud bude v každém tahu udržovat sudý počet kuliček od každé barvy.

Vzhledem k tomu, že počáteční stav je 100 bílých a 110 černých kuliček v misce, může tuto strategii uplatnit hráč, který nezačíná.

- 1.2. Na hromádce je 2009 zápalek. V každém tahu může hráč odebrat jednu nebo dvě zápalky. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Ten, který vezme poslední zápalku, prohrává. Popište vítěznou strategii pro některého hráče.

ŘEŠENÍ.

Úlohu můžeme opět jednoduše vyřešit, zamyslíme-li se nad ní od posledního tahu.

Hru zjevně vyhraje hráč, který po svém tahu zanechá pouze jednu zápalku. Hráč naopak prohraje, pokud po svém tahu nechá soupeři takový počet zápalek, že soupeř může po svém tahu zanechat jednu zápalku, tzn. hráč prohraje pokud po svém tahu zanechá dvě nebo tři zápalky. Pokud ale hráč po svém tahu zanechá čtyři zápalky, přinutí naopak protihráče k jedné z proherních variant (2 nebo 3 zápalky) a vyhrává. Dále můžeme postupovat zcela obdobně, tedy počty zápalek vedoucí k výhře jsou 1, 4, 7, ..., k prohře 2, 3, 5, 6, 8, 9,

Řešením je tedy zanechávat po každém svém tahu $(3k + 1)$ zápalek, $k \in \mathbb{N}_0$.

Tuto strategii je možné uplatnit, neboť v každém kole je možné odebrat dvě až čtyři (tedy i tři) zápalky.

Vzhledem k tomu, že

$$2009 = 3 \cdot 669 + 2,$$

tuto strategii může uplatnit začínající hráč, pokud v prvním tahu odebere jednu zápalku. Pokud ale začne hru jiným tahem, může vítěznou strategii uplatnit jeho soupeř.

- 1.3. Na jedné hromádce je 2009, na druhé 2020 zápalek. V každém tahu si hráč zvolí jednu hromádku a odebere z ní jednu nebo dvě zápalky. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Vyhrává ten, po jehož tahu nezůstane na stole žádná zápalka. Popište vítěznou strategii pro některého hráče.

ŘEŠENÍ.

Zabývejme se hrou opět od konce a označme si (a, b) momentální pozici hry, kde a označuje počet zápalek na první a b počet zápalek na druhé hromádce.

Jestliže vyhrává hráč, po jehož tahu nezůstane na stole žádná zápalka, pak určitě jednou z výherních variant je zanechat po svém tahu pozici $(1,1)$ (protihráč po sobě musí zanechat pozici $(1,0)$ nebo $(0,1)$). Podobně je výherní také varianta $(2,2)$ (soupeř zanechá buď $(0,2)$, $(2,0)$ – jasné ukončení dalším tahem nebo pozici $(1,2)$, $(2,1)$, kterou lze převést na pozici $(1,1)$, která je výherní). Stejně tak lze ukázat, že výherní je pozice $(3,3)$, $(4,4)$, ... , tedy obecně pozice (k, k) , kde $k \in N_0$.

Naopak – prohrávající jsou pozice, které soupeř může převést na pozice (k, k) , tedy pozice $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$,

Jak vidno, (k, k) ale není jediná vítězná možnost. Lze si snadno rozmyslet, že další možnosti, které donutí soupeře k proherním pozicím z předchozího odstavce jsou $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,4)$, $(4,1)$,

Pokud dáme všechny předchozí úvahy dohromady, dojdeme k výherní strategii zanechávat po každém tahu takové počty zápalek, aby jejich rozdíl byl dělitelný třemi.

$$2020 - 2009 = 11$$

Tuto strategii může tedy uplatnit první hráč v případě, že v prvním tahu odebere dvě zápalky z první nebo jednu zápalku z druhé hromádky. Jestliže ale začne hru jinak, může výherní strategii uplatnit druhý hráč.

Soutěžní úloha 2

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána.

TEORIE

Zajímá nás, kolik má dané číslo dělitelů.

Příklad: Určete počet kladných dělitelů čísla 72.

Prvočíselný rozklad čísla 72 má tvar $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Dělitelé čísla 72 (kromě čísla 1) budou mít tedy primočíselný rozklad složený pouze z činitelů 2 a 3, tzn. budou ve tvaru $2^a \cdot 3^b$, kde $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$:

	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

Číslo $72 = 2^3 \cdot 3^2$ má tedy $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ dělitelů.

Při zobecnění předchozí úvahy snadno dospějeme k závěru, že počet kladných dělitelů čísla $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ je $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1)$.

NÁVODNÉ ÚLOHY

2.1. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má přesně 2009 kladných dělitelů.

ŘEŠENÍ.

Prvočíselný rozklad čísla 2009 má tvar

$$2009 = 7^2 \cdot 41$$

Číslo, které má 2009 kladných dělitelů lze tedy vyjádřit v některém z následujících tvarů:

- I. $x = p_1^{k_1}$, kde $k_1 + 1 = 2009$, tedy $k_1 = 2008$. Nejmenší číslo, které lze zapsat v tomto tvaru je $2^{2008} \approx 2,94 \cdot 10^{604}$.
- II. $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, kde $(k_1 + 1)(k_2 + 1) = 49 \cdot 41$, tedy $k_1 = 48$, $k_2 = 40$. Nejmenší číslo, které lze zapsat v tomto tvaru je $2^{48} \cdot 3^{40} \approx 3,42 \cdot 10^{33}$.
- III. $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$, kde $(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) = 41 \cdot 7 \cdot 7$, tedy $k_1 = 40$, $k_2 = 6$, $k_3 = 6$. Nejmenší číslo, které lze zapsat v tomto tvaru je $2^{40} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \approx 1,25 \cdot 10^{19}$ a to je i hledané číslo.

2.2. Která čtyřmístná čísla mají nejvíce dělitelů?

ŘEŠENÍ.

Z předchozího již víme, že počet kladných dělitelů čísla $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ je

$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1)$. Zřejmě tedy největší počet dělitelů bude mít číslo, v jehož primočíselném rozkladu se bude vyskytovat největší počet různých prvočísel. Hledáme tedy čtyřciferné číslo s touto vlastností.

Násobíme-li postupně nejmenší různá prvočísla, zjistíme, že součin

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

Toto číslo již nelze vynásobit nejbližším dalším prvočíslem 13, pokud výsledkem má být čtyřciferné číslo.

Můžeme jej ale ještě vynásobit číslem 2^2 a tím ještě zvýšit počet dělitelů, takže obdržíme číslo

$$x = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,$$

které má $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 64$ kladných dělitelů.

Stejný počet dělitelů má také číslo

$$7560 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

v jehož prvočíselném rozkladu je méně různých prvočísel, což je ale kompenzováno celkově větším počtem prvočísel v rozkladu.

2.3. Najděte všechna lichá čtyřmístná čísla, která mají více než 10 kladných dělitelů, z nichž aspoň 30% jsou druhé mocniny přirozených čísel.

ŘEŠENÍ.

Je-li hledané číslo liché, pak jeho prvočíselný rozklad musí obsahovat pouze lichá prvočísla. Předpokládejme nejprve, že hledané číslo je ve tvaru $x = p_1^{k_1}$. Má-li mít toto číslo více než 10 kladných dělitelů, pak $k_1 \geq 10$. Tomuto ale nevyhovuje žádné čtyřmístné číslo, neboť $3^{10} = 59049$.

Předpokládejme tedy, že hledáme číslo ve tvaru $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$. První možnost, která vyhovuje zadání je $x = p_1^3 \cdot p_2^2$. Číslo v tomto tvaru má 12 kladných dělitelů z nichž čtyři $(1, p_1^2, p_2^2, p_1^2 \cdot p_2^2)$ jsou druhou mocninou přirozeného čísla. Z toho vyplývají následující řešení:

$3^3 \cdot 7^2 = 1323$	$5^3 \cdot 3^2 = 1125$	$7^3 \cdot 3^2 = 3087$
$3^3 \cdot 11^2 = 3267$	$5^3 \cdot 7^2 = 6125$	$7^3 \cdot 5^2 = 8575$
$3^3 \cdot 13^2 = 4563$		
$3^3 \cdot 17^2 = 7803$		
$3^3 \cdot 19^2 = 9747$		

Tvar čísla $x = p_1^3 \cdot p_2^3$ nemá dostatečný počet dělitelů ve tvaru druhých mocnin, proto dalším možným tvarem čísla je $x = p_1^4 \cdot p_2^2$, který má 15 dělitelů, z nichž je 6 druhou mocninou přirozeného čísla. Další možnosti jsou tedy:

$3^4 \cdot 5^2 = 2025$	$5^4 \cdot 3^2 = 5625$
$3^4 \cdot 7^2 = 3969$	
$3^4 \cdot 11^2 = 9801$	

Lze si snadno rozmyslet, že posledním možným tvarem hledaného čísla, v jehož prvočíselném rozkladu se vyskytují dvě prvočísla, je $x = p_1^5 \cdot p_2^2$. Toto číslo má 18 kladných dělitelů, z nichž 6 je druhou mocninou přirozeného čísla. Jediná možnost vyplývající z tohoto rozkladu je

$$3^5 \cdot 5^2 = 6075$$

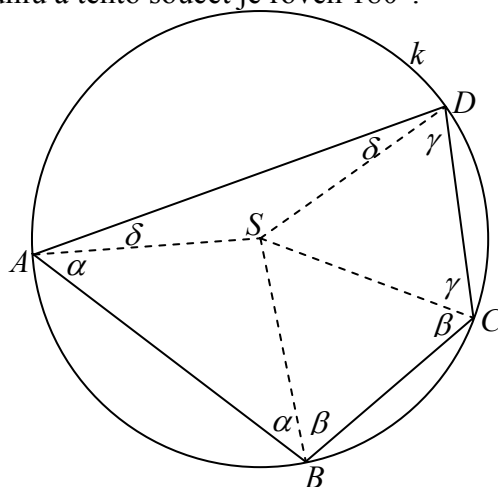
Nyní předpokládejme, že je hledané číslo ve tvaru $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$. První možností, která má dostatečný počet dělitelů a vyhovuje zadání je $x = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2$. Pokud ale má být hledané číslo čtyřciferné, nepřichází ani tato možnost do úvahy, neboť $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 11025$. Je tedy zřejmé, že žádná další řešení už neexistují

Soutěžní úloha 3

V rovině je dána úsečka AB . Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB , CD , DA označené po řadě K , L , M platí: body A , B , L , D leží na jedné kružnici a rovněž body K , L , D , M leží na jedné kružnici.

TEORIE

Čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici označujeme jako *tětivový*. Pro tětivový čtyřúhelník platí, že součet dvou protilehlých vnitřních úhlů je stejně velký jako součet zbylých (protilehlých) vnitřních úhlů a tento součet je roven 180° :



Součet úhlů u vrcholů A , C je roven $\alpha + \delta + \beta + \gamma$.

Součet úhlů u vrcholů B , D je roven $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

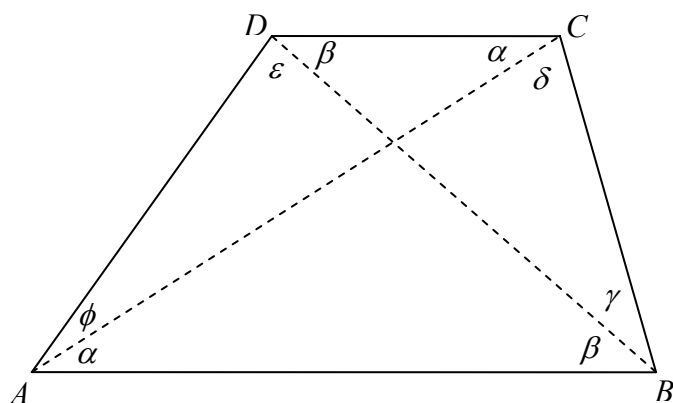
Tyto součty jsou rovny 180° , neboť součet všech úhlů ve čtyřúhelníku je roven 360° (stačí si uvědomit, že úhlopříčkou lze čtyřúhelník rozdělit na dva trojúhelníky).

NÁVODNÉ ÚLOHY

3.1. Dokažte, že lichoběžníku se dá opsat kružnice, právě když je rovnoramenný.

ŘEŠENÍ.

Jedná se lichoběžník, tedy $AB \parallel CD$ a úhly si můžeme označit následujícím způsobem:



Vycházíme z předpokladu, že lichoběžníku lze opsat kružnice a chceme dokázat, že je rovnoramenný. Tedy, že $\alpha + \phi = \beta + \gamma$.
Lichoběžník je tětiový, právě když platí, že součet dvou protilehlých vnitřních úhlů je stejně velký jako součet zbylých vnitřních úhlů, tedy:

$$\alpha + \phi + \alpha + \delta = \beta + \gamma + \beta + \epsilon \quad (1)$$

Dále víme, že součet úhlů v trojúhelnících ABC a ACD je stejný ($=180^\circ$):

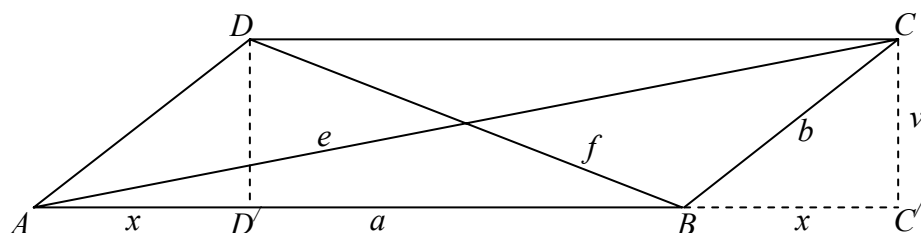
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \phi + \alpha + \beta + \epsilon \quad (2)$$

Po odečtení rovnic (1) – (2) a následné úpravě obdržíme vztah, který jsme měli dokázat:

$$\alpha + \phi = \beta + \gamma.$$

3.2. Dokažte, že pro délky stran a, b a délky úhlopříček e, f rovnoběžníku platí $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$.

ŘEŠENÍ.



Označme D' průsečík kolmice spuštěné z bodu D na stranu AB a C' průsečík kolmice spuštěné z bodu C na přímkou AB . Dále označme $x = AD' = BC'$ a $v = CC' = DD'$.
Trojúhelníky ACC' , $DD'B$ a $BC'C$ jsou pravoúhlé, můžeme tedy použít Pythagorovu větu:

$$\triangle ACC': |AC'|^2 + |C'C|^2 = |AC|^2$$

$$\triangle DD'B: |D'B|^2 + |D'D|^2 = |BD|^2$$

$$\triangle BC'C: |BC'|^2 + |C'C|^2 = |BC|^2$$

Dosadíme-li, obdržíme:

$$(a+x)^2 + v^2 = e^2$$

$$(a-x)^2 + v^2 = f^2$$

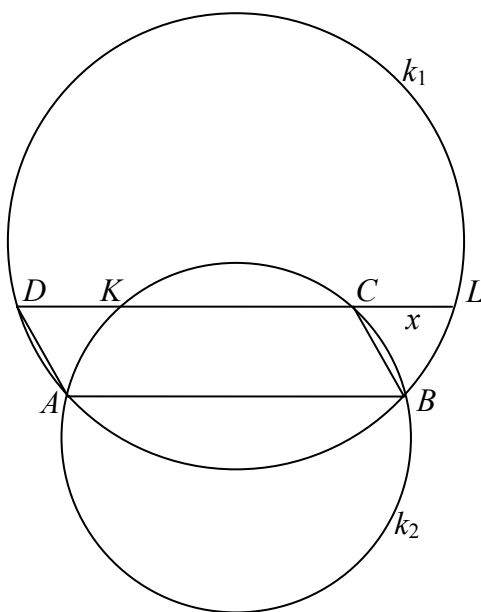
$$x^2 + v^2 = b^2$$

Dosadíme-li ze třetí rovnice za v^2 do prvních dvou rovnic, pak po úpravě dostaneme

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2 = e^2 \\ a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2 = f^2 \quad (+) \\ \hline 2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2 \end{array}$$

- 3.3. Strana AB rovnoběžníku $ABCD$ má délku a . Kružnice opsaná trojúhelníku ABD protíná polopřímku opačnou k polopřímce CD v bodě L ; označme $x = |CL|$. Vypočítejte délku tětiny, kterou přímka CD vytíná na kružnici opsané trojúhelníku ABC .

ŘEŠENÍ.



k_1 ... kružnice opsaná trojúhelníku ABD ,

k_2 ... kružnice opsaná trojúhelníku ABC ,

$|AB| = |CD| = a$, $K = k_2 \cap DC$.

Jak vyplývá z úlohy 3.1., lichoběžník $ABCK$ je tětíkový a tudíž rovnoramenný. Proto $|DK| = |CL| = x$.

Takže hledaná délka $|KC| = a - x$.

Soutěžní úloha 4

Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel.

NÁVODNÉ ÚLOHY

4.1. Najděte 20 po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla.

ŘEŠENÍ.

Označme a první z hledaných čísel. Pak součet dvaceti hledaných čísel lze vyjádřit:

$$\begin{aligned} S &= a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+18) + (a+19) = \\ &= 20a + 1 + 2 + \dots + 18 + 19 = \\ &= 20a + \frac{19}{2} \cdot (1+19) = 20a + 10 \cdot 19 = 20a + 190 \end{aligned}$$

Číslo S je sudé, tedy dělitelné dvojkou, ale z jeho zápisu vyplývá, že není dělitelné číslem 4. Proto úloha nemá řešení.

4.2. Najděte 2009 po sobě jdoucích pětímístných čísel, jejichž součet je třetí mocninou přirozeného čísla.

ŘEŠENÍ.

Nechť a je tentokrát prostřední z 2009 čísel, které tvoří součet. Pak obdobně jako v předchozí úloze můžeme součet hledaných čísel vyjádřit:

$$\begin{aligned} S &= (a-1004) + (a-1003) + \dots + a + \dots + (a+1003) + (a+1004) = \\ &= 2009a \end{aligned}$$

Přičemž tento součet má být mocninou přirozeného čísla, tedy:

$$\begin{aligned} 2009a &= n^3, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ což lze pomocí prvočíselného rozkladu čísla 2009 napsat:} \\ 7^2 \cdot 41 \cdot a &= n^3, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Omezme nyní přípustné hodnoty čísla a . Platí:

$$\begin{aligned} 10000 + 1004 &\leq a \leq 99999 - 1004 \\ 11004 &\leq a \leq 98995 \end{aligned}$$

Podobně můžeme vymezit interval pro neznámé n :

$$2009 \cdot 11004 \leq n^3 \leq 2009 \cdot 98995$$

$$281 \leq n \leq 583$$

Z prvočíselného rozkladu čísla 2009 je zřejmé, že číslo n musí být násobkem čísel 7 a 41, takže

$n = 7 \cdot 41 = 287$... vyhovuje podmínce a hodnotu čísla a v tomto případě vypočteme:

$$n^3 = 7^3 \cdot 41^3 = 2009a = 7^2 \cdot 41 \cdot a$$

$$a = 7 \cdot 41^2 = 11767$$

A hledaná čísla jsou 10763, 10764, ..., 12770, 12771.

Podmínce, ale vyhovuje ještě řešení:

$$n = 7 \cdot 41 \cdot 2 = 574$$

Pak

$$a = 7 \cdot 41^2 \cdot 2^3 = 94136$$

Hledaná čísla pro tento případ: 93132, 93133, ..., 95139, 95140.

4.3. Součet druhých mocnin jedenácti po sobě jdoucích trojmístných čísel je násobkem čísla 2009. Najděte tato čísla.

ŘEŠENÍ.

Nechť a je opět prostřední z hledaných čísel. Pak součet druhých mocnin čísel vyjádříme:

$$S = (a-5)^2 + (a-4)^2 + \dots + a^2 + \dots + (a+4)^2 + (a+5)^2$$

$$S = (a^2 - 10a + 25) + (a^2 - 8a + 16) + \dots + a^2 + \dots + (a^2 + 8a + 16) + (a^2 + 10a + 25)$$

$$S = 11a^2 + 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

$$S = 11a^2 + 110$$

Tento součet má být násobkem čísla 2009.

$$11a^2 + 110 = k \cdot 2009$$

$$11(a^2 + 10) = k \cdot 2009$$

Nyní opět vymezíme intervaly přípustných hodnot pro a , k .

$$100 + 5 \leq a \leq 999 - 5$$

$$105 \leq a \leq 994$$

$$11 \cdot (105^2 + 10) \leq k \cdot 2009 \leq 11 \cdot (994^2 + 10)$$

$$61 \leq k \leq 5409$$

Omezíme-li navíc přípustné hodnoty dalšími podmínkami, například na dělitelnost, pak po prozkoumání všech zbývajících možností najdeme dvě řešení pro a : $a = 513$ nebo $a = 758$.

Tedy hledaná čísla jsou:

508, 509, ..., 518 nebo

753, 754, ..., 763.

Soutěžní úloha 5

Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D . Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E . Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD .

TEORIE

Věty o podobnosti trojúhelníků

Věta sss

Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran, jsou podobné.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Věta sus

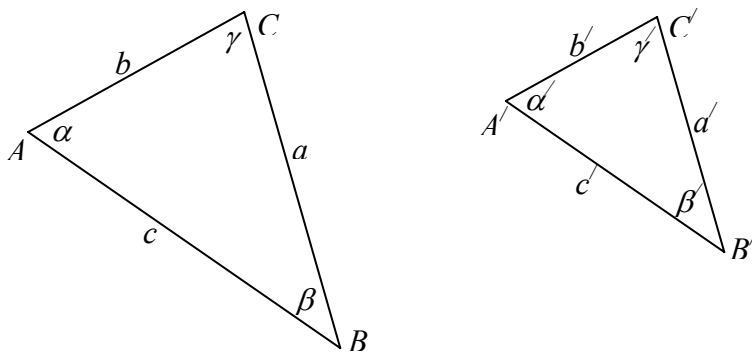
Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou odpovídajících si stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \gamma \cong \gamma'$$

Věta uu

Každé dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.

$$\alpha \cong \alpha', \beta \cong \beta'$$



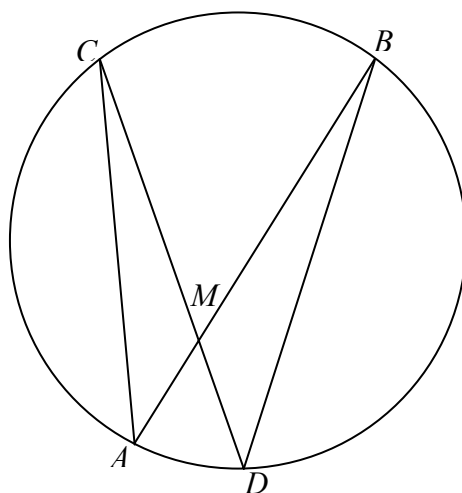
Věta o obvodových úhlech

Dva obvodové úhly mají nad stejnou tětivou vždy stejnou velikost.

NÁVODNÉ ÚLOHY

5.1. Jestliže se tětivy AB a CD kružnice k protínají v bodě M , jsou trojúhelníky AMC a DMB podobné.

ŘEŠENÍ.



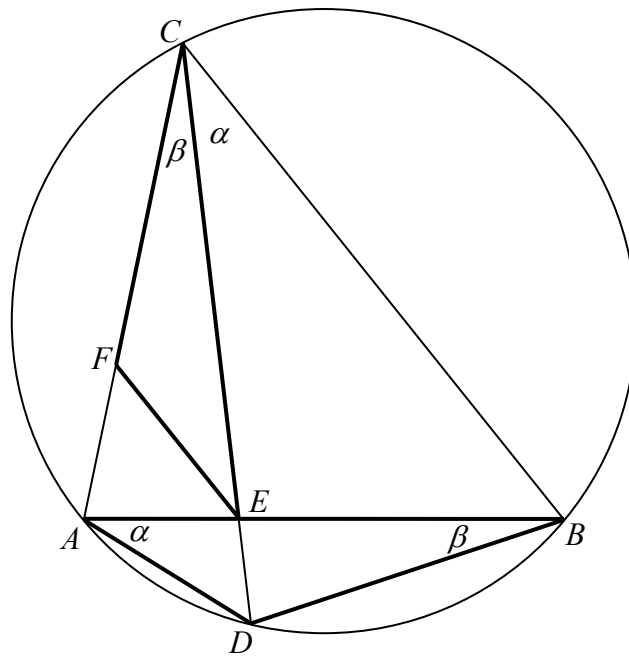
$|\angle AMC| \cong |\angle DMB|$... vrcholové úhly u vrcholu M

$|\angle ACD| \cong |\angle ABD|$... obvodové úhly nad tětivou AD

Podle věty *uu* jsou tedy trojúhelníky AMC a DMB podobné.

5.2. Nechť E je vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC . Označme D ($D \neq C$) průsečík přímky CE s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC . Dále označme F průsečík strany AC s přímkou, která prochází bodem E a je rovnoběžná s BC . Dokažte, že trojúhelníky ABD a ECF jsou podobné.

ŘEŠENÍ.



Označme $\alpha = |\angle DAB|$, $\beta = |\angle DBA|$.

Pak $|\angle ACD| = |\angle FCE| = \beta$, neboť úhly ACD a DBA jsou obvodové úhly nad tětivou AD .

Dále platí, že $|\angle DCB| = \alpha$, neboť úhly DCB a DAB jsou obvodové úhly nad tětivou DB .

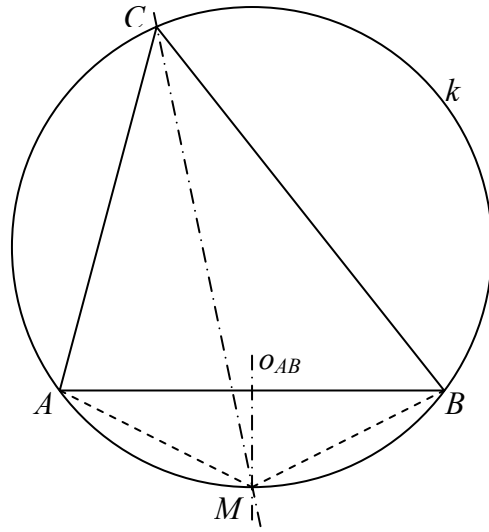
Nyní budeme chtít dokázat, že $|\angle ADB| = |\angle EFC|$.

Z trojúhelníku ADB platí, že $|\angle ADB| = 180^\circ - \alpha - \beta$.

Víme také, že z rovnoběžnosti BC a EF vyplývá, že $|\angle AFE| = |\angle ACB| = \alpha + \beta$. Úhly AFE a EFC jsou vedlejší, proto $|\angle EFC| = 180^\circ - \alpha - \beta$ a tedy podle věty *uu* jsou trojúhelníky ABD a ECF podobné.

5.3. Necht' ABC je trojúhelník, v němž $|AC| \neq |BC|$. Dokažte, že osa úhlu BCA se s osou strany AB protíná v bodě, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC .

ŘEŠENÍ.



Bod M leží na průsečíku o_{AB} a kružnice k opsané trojúhelníku ABC . Trojúhelník AMB je rovnoramenný se základnou AB , jeho vnitřní úhly při vrcholech A a B jsou tedy shodné. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné i úhly BCM a BAM (obvodové úhly nad tětivou BM), resp. ACM a ABM (obvodové úhly nad tětivou AM). Proto jsou shodné i úhly BCM a ACM .

Polopřímka CM je tudíž osou úhlu ACB :

$$|\angle ACM| = |\angle BCM| = \frac{\gamma}{2}$$

Soutěžní úloha 6

Reálná čísla a, b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokažte nerovnost $b > 3$.

b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic.

TEORIE

Každá kvadratická rovnice se dá vyjádřit ve tvaru: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, kde a, b, c jsou číselné koeficienty, přičemž koeficient a musí být nenulový, v opačném případě by se jednalo o lineární rovnici.

Pro výpočet kořenů x_1 a x_2 je vhodné nejprve zjistit hodnotu diskriminantu $D = b^2 - 4ac$.

Podle hodnoty diskriminantu D můžeme dostat obecně tři možnosti řešení:

1. $D > 0$ Kvadratická rovnice má dva rozdílné reálné kořeny.
2. $D = 0$ Kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen.
3. $D < 0$ Kvadratická rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel $\mathbb{R}$. Má ale řešení v oboru komplexních čísel.

Kořeny kvadratické rovnice pak vypočteme ze známého vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Každý polynom $ax^2 + bx + c$ můžeme také převést na součinnový tvar $a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice.

Rovnici $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ pak nazýváme rovnicí v součinnovém tvaru.

Vypočítat kořeny kvadratické rovnice můžeme také pomocí Vietových vzorců. Tato metoda není tak univerzální jako metoda výpočtu pomocí diskriminantu. Nejprve je potřeba upravit rovnici na normovaný tvar $x^2 + px + q = 0$ a dále hledáme takové kořeny x_1 a x_2 , které vyhovují rovnicím:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

NÁVODNÉ ÚLOHY

6.1. Najděte všechny dvojice čísel a, b , pro něž má každá z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

v množině reálných čísel dva různé kořeny, přičemž každý kořen druhé rovnice je o 1 větší než některý z kořenů první rovnice.

ŘEŠENÍ.

Pro kořeny x_1, x_2 první rovnice (z Vietových vzorců) platí

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 \cdot x_2 = b$$

Pro kořeny druhé rovnice $x'_1 = x_1 + 1$, $x'_2 = x_2 + 1$ analogicky platí

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 &= -b, & \text{tedy} & & x_1 + 1 + x_2 + 1 &= -b \\ x'_1 \cdot x'_2 &= a, & & & (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) &= a \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu 4 rovnic o 4 proměnných

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 \cdot x_2 = b$$

$$x_1 + x_2 = -b - 2$$

$$x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = a - 1$$

Po odečtení první rovnice od třetí a dosazení z první a druhé rovnice do čtvrté rovnice obdržíme po úpravě soustavu dvou lineárních rovnic o dvou proměnných a, b .

$$a - b = 2$$

$$2a - b = 1$$

Takže řešením je dvojice $a = -1, b = -3$.

JINÉ ŘEŠENÍ.

Použijeme-li k řešení úlohy vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, můžeme kořeny obou rovnic vyjádřit

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad x'_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2},$$

kde opět $x'_1 = x_1 + 1, x'_2 = x_2 + 1$, což po dosazení vede k řešení následující soustavy:

$$\begin{array}{rcl} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2} & = & \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} + 1 \\ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2} & = & \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} + 1 \\ \hline -b - \sqrt{b^2 - 4a} & = & -a - \sqrt{a^2 - 4b} + 2 \\ -b + \sqrt{b^2 - 4a} & = & -a + \sqrt{a^2 - 4b} + 2 \\ \hline -2b & = & -2a + 4 \\ \hline b & = & a - 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ / (1) + (2) \end{array}$$

Dosadíme-li nyní za b do některé z původních rovnic, obdržíme opět řešení $a = -1, b = -3$.

6.2. Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b , pro něž mají každé dvě z rovnic $x^2 - 10x + a = 0, x^2 - 16x + b = 0, x^2 - 18x + a + b = 0$ aspoň jeden společný kořen.

ŘEŠENÍ.

Mají-li mít každé dvě z rovnic aspoň jeden společný kořen, pak mají buď

- I. všechny rovnice aspoň jeden kořen společný nebo
- II. každá dvojice rovnic má aspoň jeden společný kořen.

Tyto dva případy budeme řešit odděleně:

I.

Kořeny rovnic si můžeme označit:

$x_1, x_2 \dots$ kořeny 1.rovnice, $x_1, x'_2 \dots$ kořeny 2.rovnice, $x_1, x''_2 \dots$ kořeny 3.rovnice.

Pak z Vietových vzorců pro jednotlivé rovnice platí:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 = 10 & x_1 + x'_2 = 16 & x_1 + x''_2 = 18 \\ \hline x_1 \cdot x_2 = a & x_1 \cdot x'_2 = b & x_1 \cdot x''_2 = a + b \end{array}$$

Vyjádříme-li postupně z první rovnice z každé dvojice rovnic x_2, x'_2, x''_2 a dosadíme do druhé rovnice, obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_1 \cdot (10 - x_1) &= a \\x_1 \cdot (16 - x_1) &= b \\x_1 \cdot (18 - x_1) &= a + b\end{aligned}$$

Jestliže nyní sečteme první dvě rovnice a výsledek odečteme od třetí rovnice, obdržíme rovnici

$$x_1^2 - 8x_1 = 0,$$

jejíž řešení $x_1 = 0$ a $x_1 = 8$ dosadíme do prvních dvou rovnic a nalezneme řešení pro a, b : $[0, 0], [16, 64]$.

II.

Kořeny rovnic si můžeme označit:

$x_1, x_2 \dots$ kořeny 1. rovnice, $x_1', x_2' \dots$ kořeny 2. rovnice, $x_2, x_2'' \dots$ kořeny 3. rovnice.

Podobným způsobem jako v případě I. dojdeme k řešení pro a, b : $[24, 48]$.

6.3. Najděte všechny dvojice čísel a, b , pro něž má každá z rovnic $x^2 - 15x + a = 0$, $x^2 - 15x + b = 0$ v množině reálných čísel dva různé kořeny, přičemž kladný rozdíl kořenů každé rovnice je kořenem zbývající rovnice.

ŘEŠENÍ.

Označíme-li x_1, x_2 kořeny první rovnice a x_1', x_2' kořeny druhé rovnice, můžeme tyto vyjádřit pomocí známých vzorců:

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4a}}{2}, x_{1,2}' = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 4b}}{2}$$

Kladný rozdíl kořenů každé rovnice je kořenem zbývající rovnice. To znamená, že může nastat jedna ze čtyř možností

$$\begin{array}{llll} \text{I. } x_2 - x_1 = x_1' & \text{II. } x_2 - x_1 = x_2' & \text{III. } x_2 - x_1 = x_1' & \text{IV. } x_2 - x_1 = x_2' \\ x_2' - x_1' = x_1 & x_2' - x_1' = x_1 & x_2' - x_1' = x_2 & x_2' - x_1' = x_2 \end{array}$$

Tyto případy budeme řešit odděleně. Ukážeme např. řešení pro II.

$$\begin{aligned}\sqrt{225 - 4a} &= \frac{15 - \sqrt{225 - 4b}}{2} & / \cdot 2 \\ \sqrt{225 - 4b} &= \frac{15 + \sqrt{225 - 4a}}{2} & / \cdot 4 \\ \hline 2 \cdot \sqrt{225 - 4a} &= 15 - \sqrt{225 - 4b} \\ -2 \cdot \sqrt{225 - 4a} &= 30 - 4 \cdot \sqrt{225 - 4b} & / (1) + (2)\end{aligned}$$

$$5 \cdot \sqrt{225 - 4b} = 45$$

$$\sqrt{225 - 4b} = 9$$

$$225 - 4b = 81$$

$$4b = 144$$

$$b = 36$$

$$\vdots$$

$$a = 54$$

Podobně bychom vyřešili i možnosti I., III., IV, čímž dostaneme všechna řešení $[0, 0], [54, 36], [36, 54], [50, 50]$.

Poznámka: Tato úloha se stejně jako předchozí dala vyřešit také pomocí Vietových vzorců.