59. ročník Matematické olympiády

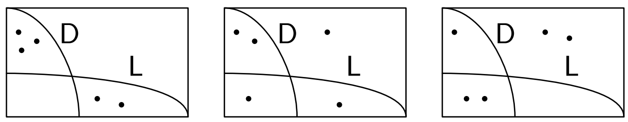
# Úlohy domácí části I. kola kategorie C

**1.** *Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“ s těmito pravidly: Hráč A si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč B vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a hráč A mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou (například písmena A, Á jsou různá). Kdyby si hráč A myslel například slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpoví hráč A, že jedno písmeno uhodl hráč B na správné pozici a dvě na nesprávné. Zkráceně sdělí „$1 + 2$“, neboť se opravdu obě slova shodují pouze v písmenu O včetně pozice (druhé zleva) a v písmenech K a L, jejichž pozice jsou odlišné. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tato slova v daném pořadí odpověděla* $0 + 3$, $0 + 2$, $1 + 2$, $2 + 0$ *a* $1 + 2$. *Zjistěte, jaké slovo si Erika mohla myslet.*

Řešení. Slova ZÁPAL a STRUK nemají společná písmena. Proto se, jak plyne z odpovědí $1 + 2$ a $0 + 2$, mezi jejich písmeny, jež dohromady tvoří množinu $\mathsf{M} = \{Z, Á, P, A, L, S, T, R, U, K\}$, nachází všech pět písmen hledaného slova. Ve slově SKOBA mají být právě tři z hledaných písmen. Jsou to tedy písmena S, K, A. (Zbývající písmena B a O totiž do množiny $\mathsf{M}$ nepatří.) Ve slově CESTA mají být jen dvě z hledaných písmen, a obě na správné pozici. Jsou to již nalezená S a A, která tedy patří na třetí, resp. páté místo hledaného slova (a písmeno T lze z množiny $\mathsf{M}$ „vyloučit“). Písmeno K nemůže být ani na prvním, ani druhém místě, jak plyne z odpovědí pro slova KABÁT $(0 + 3)$ a SKOBA $(1 + 2)$. Je tedy na čtvrtém místě a zbývá určit první dvě písmena. Ve slově STRUK jsou jen dvě z hledaných písmen (musí to tedy být S a K), obě v nesprávných pozicích. Proto z množiny $\mathsf{M}$ „vyloučíme“ i písmena R, U (a T, pokud jsme to dosud neučinili). Zbývající dvě hledaná písmena proto patří do množiny $\{Z, Á, P, L\}$. Z podmínek pro slovo KABÁT plyne, že jedno z nich je Á. Ve slově ZÁPAL je právě jedno písmeno ve správné pozici. Kdyby to bylo Z, neměli bychom kam umístit písmeno Á. Je tedy Á na druhém místě a navíc lze vyloučit písmeno Z. Na prvním místě hledaného slova může být L nebo P. Snadno se přesvědčíme, že nalezená slova LÁSKA i PÁSKA vyhovují všem podmínkám úlohy.

Úlohy k procvičení:

1.1. Z pěti rodin odebírají tři rodiny deník Dnes a dvě Lidové noviny. Existuje mezi nimi rodina, která neodebírá žádný z těchto deníků? [Taková rodina existovat může, ale nemusí. Některé rodiny totiž mohou odebírat oba deníky. Možné situace znázorňují diagramy na obr. 1.]



Obr. 1

1.2. Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova SIRUP a VODKA. Erika v daném pořadí odpověděla $0 + 3$ a $1+1$. Dokažte, že všechna písmena slova, které si Erika myslela, patří do množiny $\mathsf{M} = \{S, I, R, U, P\} \cup \{V, O, D, K, A\}$. (Poznamenejme, že Erika si mohla myslet například slovo DOPIS nebo RUSKO.)

1.3. Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“. Erika si myslela slovo AGÁTY a Klárka vyslovila slova KABÁT a MĚSTA. Ověřte, že Erika musela odpovědět stejně jako v úloze 1.2. Proč nyní nepatří všechna písmena slova, která si Erika myslela, do množiny $\mathsf{L} = \{K, A, B, Á, T\} \cup \{M, Ě, S, T, A\}$?

1.4. Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“. Klárka vyslovila slova OPAVŮ a ÚLOZE, přičemž Erika odpověděla stejně jako v úloze 1.2. Jaké slovo si Erika myslela, když všechna jeho písmena už patří do množiny $\mathsf{L} = \{O, P, A, V, Ů\} \cup \{Ú, L, O, Z, E\}$? [PAVLE]

1.5. Třicet maturantů jednoho gymnázia podalo přihlášku k dalšímu studiu na některou ze šesti fakult ČVUT. Využili možnost podat více přihlášek, a tak polovina žáků podala přihlášku aspoň na tři fakulty, třetina si podala přihlášku na více než tři fakulty. Na fakultu architektury se s ohledem na talentovou přijímací zkoušku nehlásil nikdo. Dokažte, že na některou ze zbývajících pěti fakult se přihlásilo méně než dvacet studentů. [50–C–I–5]

1.6. Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz? [58–C–I–1]

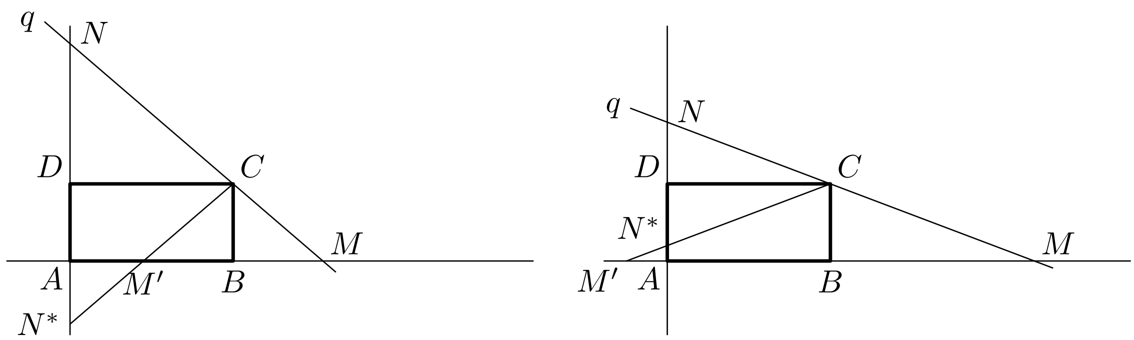
**2.** *Vrcholem $C$ pravoúhelníku $ABCD$ veďte přímky $p$ a $q$, které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod $C$, přičemž přímka $p$ má od bodu $A$ největší možnou vzdálenost a přímka $q$ vymezuje s přímkami $AB$, $AD$ trojúhelník co nejmenšího obsahu.*

Řešení. Pata $P$ kolmice z bodu $A$ na přímku $p$ procházející bodem $C$ leží na Thaletově kružnici nad průměrem $AC$. Vzdálenost bodu $A$ od přímky $p$, tj. délka úsečky $AP$, je tedy nejvýše rovna velikosti průměru $AC$. Přitom rovnost nastane, právě když je přímka $p$ kolmá na úhlopříčku $AC$. Přitom je zřejmé, že taková přímka $p$ má s daným pravoúhelníkem společný pouze bod $C$.

Zvolme nyní libovolnou přímku $q$ tak, aby měla s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod $C$. Její průsečíky s přímkami $AB$, $AD$ označme $M$ a $N$ (v uvedeném pořadí). Dále označme $M'$ obraz bodu $M$ v souměrnosti podle přímky $BC$ a $N^*$ obraz bodu $N$ v souměrnosti podle přímky $CD$. Protože $|\sphericalangle NCD| + |\sphericalangle MCB| = 180° - |\sphericalangle BCD| = 90°$, plyne z právě uvedených souměrností rovnost $|\sphericalangle MCM'| = 2|\sphericalangle MCB| = 2(90° - |\sphericalangle NCD|) = 180° - 2|\sphericalangle NCD| = 180° - |\sphericalangle NCN^*|$. Body $C$, $M'$ a $N^*$ leží tudíž na téže polopřímce s počátkem $C$. Pro obsah trojúhelníku $AMN$ tak vždy platí (obr. 2)

$$S_{AMN} = S_{ABCD} + S_{BMC} + S_{DCN} = S_{ABCD} + S_{M'BC} + S_{DN^*C} \geqq 2S_{ABCD},$$

s rovností, právě když polopřímka $CM' = CN^*$ bude procházet vrcholem $A$ daného pravoúhelníku, tj. právě když $M' = A = N^*$ (pak budou $BC$ a $CD$ středními příčkami trojúhelníku $AMN$).




Obr. 2

*Závěr.* Přímku $q$, pro kterou je obsah trojúhelníku $AMN$ minimální, sestrojíme jako přímku $CM$, kde $M$ je obraz bodu $A$ v osové souměrnosti s osou $BC$.

Přímka $p$ s největší možnou vzdáleností od bodu $A$ za daných podmínek, je kolmice na úsečku $AC$ sestrojená v bodě $C$.

*Poznámka.* K právě uvedenému řešení může žáky inspirovat aktivita se skládáním papíru popsaná v úloze 2.1. Místo skládáním papíru lze situaci modelovat na počítači v některém z nástrojů dynamické geometrie, například v Cabri geometrii nebo v Geonextu.

Jiné řešení. Označme $P$ patu kolmice z bodu $A$ na hledanou přímku $p$ a $\varphi$ velikost odchylky přímek $p$ a $AC$. Pro vzdálenost $d$ přímky $p$ od bodu $A$ platí $d = |AP| = |AC| \sin\varphi \leqq |AC|$. Přímka $p$ má tedy největší možnou vzdálenost od bodu $A$, právě když je kolmá na $AC$.

Uvažujme libovolnou přímku $q$, která má s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod $C$, a budeme hledat, za jakých podmínek ohraničuje spolu s přímkami $AB$ a $AD$ trojúhelník nejmenšího obsahu. Použijeme označení z obr. 2 a zavedeme $a = |AB| = |DC|$, $x = |BM|$, $b = |AD| = |BC|$ a $y = |DN|$. Pomocí těchto veličin vyjádříme obsah trojúhelníku $AMN$ a odhadneme jej užitím A-G nerovnosti:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(ab+xy+ay+bx) \geqq \frac{1}{2}\bigl(ab+xy+2\sqrt{ab\cdot xy}\bigr). \qquad (1)$$

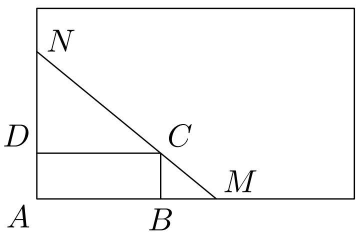
Z podobnosti trojúhelníků $BMC \sim DCN$ dostáváme $|DN|/|BC| = |DC|/|BM|$, což vzhledem ke zvolenému označení dává $xy = ab$. Po dosazení do (1) a po jednoduché úpravě tak dostaneme $S_{AMN} \geqq 2ab = 2S_{ABCD}$. Přitom rovnost nastane, právě když platí $ay = bx$. Spolu s podmínkou $xy = ab$ představují oba vztahy soustavu rovnic s neznámými $x$, $y$, jejímž vyřešením dostaneme $x = a$ a $y = b$. Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku jako v prvním řešení, kde jsme též uvedli konstrukci přímky $q$.

Jiné řešení. Postupujeme stejně jako v předchozím řešení s tím rozdílem, že nejprve z podobnosti trojúhelníků $BMC \sim DCN$ určíme $y = ab/x$ a potom odhadneme obsah trojúhelníku $AMN$ pomocí tvrzení z úlohy 5.2 takto:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(a+x)\Bigl(b+\frac{ab}{x}\Bigr) = \\ &= \frac{1}{2}\Bigl(2ab+bx+\frac{a^2b}{x}\Bigr) = ab + \frac{1}{2}ab\Bigl(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\Bigr) \geqq 2ab. \end{aligned}$$

Rovnost nastává, právě když $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{x}$, což je ekvivalentní s podmínkou $x = a$.

Úlohy k procvičení:




2.1. Na list papíru tvaru obdélníku narýsujte podle obrázku pravoúhelník $ABCD$ tak, aby jeho strany $AB$ a $AD$ splývaly s okrajem papíru. Pak sestrojte přímku, aby měla s pravoúhelníkem společný jen bod $C$ a její průnik listem papíru tvořil úsečku $MN$, podél níž papír rozřízněte. Vzniklý papírový model trojúhelníku $AMN$ s narýsovaným obdélníkem $ABCD$ přehněte podél úseček $BC$ a $DC$. Tuto činnost několikrát opakujte, přitom pro tentýž pravoúhelník $ABCD$ volte různé délky úsečky $BM$. Co lze z výsledku usoudit o poměru obsahů trojúhelníku $AMN$ a pravoúhelníku $ABCD$? Hypotézu dokažte.

2.2. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla $a$, $b$ platí $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b$. [Žákům lze poradit substituci $a = u^2$ a $b = v^2$ nebo $a = m-d$ a $b = m+d$, kde $m = \frac{1}{2}(a+b)$ a $0 \leqq |d| \leqq \frac{1}{2}m$.]

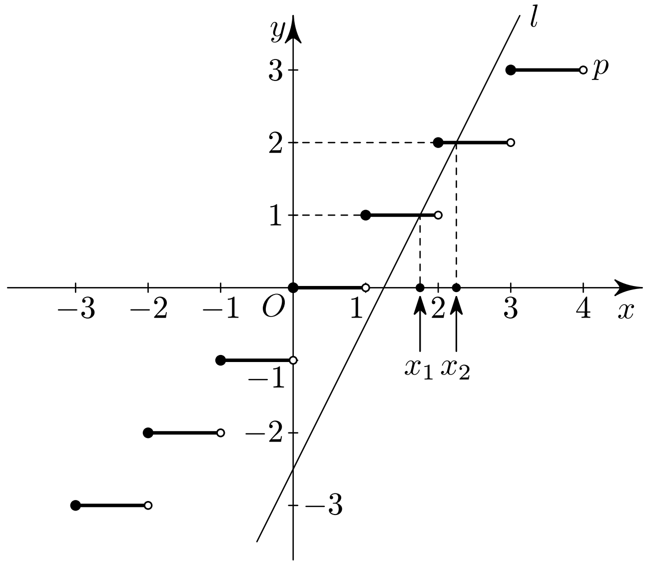
2.3. Je dán ostrý úhel $KBL$ a bod $M$ jeho vnitřku. Sestrojte bodem $M$ přímku $p$ tak, aby vytínala z úhlu $KBL$ trojúhelník $ABC$ nejmenšího možného obsahu. [Kuřina, F.: Umění vidět v matematice, str. 101]

2.4. Je dán ostrý úhel $XVY$ a jeho vnitřní bod $C$. Sestrojte na rameni $VX$ bod $A$ a na rameni $VY$ bod $B$ tak, aby vzniklý trojúhelník $ABC$ měl co nejmenší obvod. [Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, str. 262]

**3.** *Určete všechna reálná čísla $x$, která vyhovují rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo $x$, tzv. dolní celou část reálného čísla $x$.)*

Řešení. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, pak $x = a + t$, kde $t \in \langle 0, 1)$, a rovnici $4(a+t) - 2a = 5$ ekvivalentně upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bylo číslo $a$ celé, musí být $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, kde $k$ je liché číslo. Navíc $2t \in \langle 0, 2)$. Je tedy buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, nebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Původní rovnice má proto dvě řešení: $x_1 = 2{,}25$ a $x_2 = 1{,}75$.

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Jejím řešením jsou $x$-ové souřadnice průsečíků grafů funkcí $l\colon y = 2x - \frac{5}{2}$ a $p\colon y = \lfloor x \rfloor$. Grafy se protínají ve dvou bodech, jak vidíme na obr. 3. Pro první průsečík platí $\lfloor x \rfloor = 1$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme $4x - 2 = 5$ a odtud $x_1 = \frac{7}{4} = 1{,}75$. Pro druhý průsečík platí $\lfloor x \rfloor = 2$, takže $4x - 4 = 5$ a $x_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$.




Obr. 3

Jiné řešení. Rovnici upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taková rovnice bude splněna, právě když číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude splňovat nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leqq x$ neboli $\frac{3}{2} < x \leqq \frac{5}{2}$. Pro taková $x$ hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ zřejmě zaplní interval $\frac{1}{2} < 2x - \frac{5}{2} \leqq \frac{5}{2}$. V něm leží právě dvě celá čísla 1 a 2, tudíž hledaná $x$ najdeme z rovnic $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.

Úlohy k procvičení:

3.1. a) Určete $\lfloor 0 \rfloor$, $\lfloor 3{,}5 \rfloor$, $\lfloor 2{,}1 \rfloor$, $\lfloor -4 \rfloor$, $\lfloor -3{,}9 \rfloor$, $\lfloor -0{,}2 \rfloor$.

b) Nechť $a$ je celé číslo a $t \in \langle 0, 1)$. Určete $\lfloor a \rfloor$, $\lfloor a + t \rfloor$, $\lfloor a + \frac{1}{2}t \rfloor$, $\lfloor a - t \rfloor$, $\lfloor a + 2t \rfloor$, $\lfloor a - 2t \rfloor$.

3.2. V kartézské soustavě souřadnic sestrojte grafy funkcí: $f\colon y = \lfloor x \rfloor$, $g\colon y = x - \lfloor x \rfloor$.

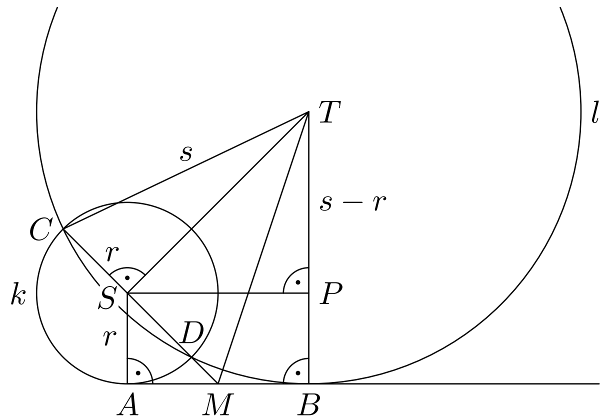
3.3. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\lfloor 3x - 5 \rfloor = 5x - 8$. [47–C–S–1]

3.4. Najděte všechny dvojice reálných čísel $x$, $y$, pro něž platí $7\lfloor x\rfloor + 2y = 117{,}4$ a $5x + 2\lfloor y\rfloor = 91{,}9$. [47–C–I–5]

3.5. Určete všechna kladná čísla $x$, pro něž je mezi deseti čísly $\lfloor x\rfloor$, $\lfloor 2x\rfloor$, $\lfloor 3x\rfloor$, $\lfloor 4x\rfloor$, $\lfloor 5x\rfloor$, $\lfloor 6x\rfloor$, $\lfloor 7x\rfloor$, $\lfloor 8x\rfloor$, $\lfloor 9x\rfloor$, $\lfloor 10x\rfloor$ právě devět různých. [47–C–II–3]

**4.** *Kružnice $k(S;r)$ se dotýká přímky $AB$ v bodě $A$. Kružnice $l(T;s)$ se dotýká přímky $AB$ v bodě $B$ a protíná kružnici $k$ v krajních bodech $C$, $D$ jejího průměru. Vyjádřete délku $a$ úsečky $AB$ pomocí poloměrů $r$, $s$. Dokažte dále, že průsečík $M$ přímek $CD$, $AB$ je středem úsečky $AB$.*

Řešení. Protože kružnice $l$ má za tětivu průměr $CD$ kružnice $k$ a dané kružnice nejsou totožné, platí pro jejich poloměry nerovnost $s > r$. Označíme-li $P$ patu kolmice z bodu $S$ na úsečku $BT$ (obr. 4), pak z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky



Obr. 4

$CST$ a $SPT$ plyne

$$|ST|^2 = s^2 - r^2 \quad \text{a} \quad |ST|^2 = |SP|^2 + (s-r)^2. \tag{1}$$

Odtud pro velikost úsečky $SP$ vychází

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s-r)^2 = 2r(s-r).$$

A protože $ABPS$ je pravoúhelník, dostáváme

$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s-r)}.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků $AMS$ a $MTS$ dále podle první rovnosti v (1) plyne

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

přitom z pravoúhlého trojúhelníku $MBT$ máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$

Je proto $|AM| = |BM|$, a bod $M$ je tedy středem úsečky $AB$.

*Poznámka.* Závěr, že $M$ je středem úsečky $AB$, plyne okamžitě z mocnosti bodu $M$ k oběma kružnicím (bod $M$ leží na tzv. chordále obou kružnic). Tyto pojmy jsou však pro soutěžící kategorie C dosud neznámé a nebudou nezbytné ani pro řešení dalších soutěžních kol.

Úlohy k procvičení:

4.1. Kružnice $k$, $l$, $m$ se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic $k$, $l$ jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice $m$. Najděte všechna řešení. [55–C–I–2]

4.2. Kružnice $k$, $l$, $m$ se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice $k$ a $l$ stejně jako kružnice $l$ a $m$ mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice $l$, jestliže poloměry kružnic $k$ a $m$ jsou 3 cm a 12 cm. [55–C–S–3]

4.3. Kružnice $k$, $l$ s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je 72 cm$^2$. Kružnice $k$ se přitom dotýká stran $CD$, $DA$ a $AB$, zatímco kružnice $l$ se dotýká stran $AB$ a $BC$. Určete poloměry kružnic $k$ a $l$, jestliže poloměr kružnice $k$ je v centimetrech vyjádřen celým číslem. [55–C–II–3]

4.4. Do kružnice $k$ o poloměru $r$ jsou vepsány dvě kružnice $k_1$, $k_2$ o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice $l$ se vně dotýká kružnic $k_1$, $k_2$ a s kružnicí $k$ má vnitřní dotyk. Kružnice $m$ má vnější dotyk s kružnicemi $k_2$ a $l$ a vnitřní dotyk s kružnicí $k$. Vypočtěte poloměry kružnic $l$ a $m$. [55–B–I–6]

**5.** *Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla $a$, $b$ platí*

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

*a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost.*

Řešení. Pravá nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$4(a^2+3ab+b^2) \leqq 5(a+b)^2,$$

kterou lze ekvivalentně upravit na nerovnost $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geqq 0$. Ta je splněna vždy a rovnost v ní nastane, právě když $a=b$.

Levou nerovnost zbavíme zlomků a umocníme na druhou,

$$25ab(a^2+2ab+b^2) \leqq 4\bigl(a^4+9a^2b^2+b^4+6a^3b+6ab^3+2a^2b^2\bigr),$$
$$25ab(a^2+b^2)+50a^2b^2 \leqq 4a^4+4b^4+44a^2b^2+24ab(a^2+b^2),$$

takže po úpravě dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$4a^4+4b^4-6a^2b^2 \geqq ab(a^2+b^2).$$

Po odečtení výrazu $2a^2b^2$ od obou stran nerovnosti se nám podaří na obou stranách využít úpravy na čtverec. Dostaneme tak (opět ekvivalentní) nerovnost

$$4(a^2-b^2)^2 \geqq ab(a-b)^2.$$

Rozdíl čtverců v závorce levé strany ještě rozložíme na součin a vztah upravíme na tvar $4(a-b)^2(a+b)^2 \geqq ab(a-b)^2$.

Pokud je $a=b$, platí rovnost. Je-li $a \neq b$, můžeme poslední nerovnost vydělit kladným výrazem $(a-b)^2$ a dostaneme tak nerovnost $4(a+b)^2 \geqq ab$ neboli $4a^2+4b^2+$ $+7ab \geqq 0$. Levá strana této nerovnosti je vždy kladná, proto vyšetřovaná nerovnost platí pro všechna kladná čísla $a$, $b$, přičemž rovnost v ní nastane, právě když $a=b$.

Jiné řešení. Aritmetický průměr $c$ čísel $a$, $b$ má tu vlastnost, že se od něj obě čísla liší o tutéž hodnotu $d$. Nahradíme-li proměnné $a$, $b$ v daných nerovnostech proměnnými $c$, $d$, zápis nerovností i důkaz obou vztahů se zjednoduší. Položme tedy $c=\frac{1}{2}(a+b)$, pak $a = c + d$ a $b = c - d$ (kde $d = \frac{1}{2}(a - b)$, jak se snadno můžeme přesvědčit). Tudíž $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$, $ab = c^2 - d^2$, odkud $a^2 + 3ab + b^2 = 5c^2 - d^2$. Označme ještě písmeny $m$ a $n$ levou a pravou stranu první z dokazovaných nerovností. Potom

$$m = \sqrt{ab} = \sqrt{c^2 - d^2}$$

a

$$n = \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{2(5c^2 - d^2)}{5 \cdot 2c} = c - \frac{d^2}{5c} = \sqrt{\left(c - \frac{d^2}{5c}\right)^2} = \sqrt{c^2 - d^2\left(\frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2}\right)}.$$

Protože z vyjádření kladné hodnoty $m$ vidíme, že $d^2 < c^2$, pro výraz v poslední závorce pod odmocninou platí

$$1 > \frac{2}{5} \geqq \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} > 0,$$

což znamená, že odmocněnec leží v uzavřeném intervalu mezi čísly $c^2 - d^2$ a $c^2$. Odtud vyplývá $m \leqq n \leqq c$, přičemž rovnost nastane, právě když $d = 0$, tj. když $a = b$.

*Poznámka.* Z výsledků soutěžní úlohy plyne, že rozdíl mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvou kladných čísel lze zdola odhadnout nezáporným lomeným výrazem takto:

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \geqq \frac{a + b}{2} - \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{(a - b)^2}{10(a + b)}.$$

Umocněním osamostatněné odmocniny a dalšími úpravami můžeme dokázat silnější odhad téhož druhu

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} \geqq \frac{(a - b)^2}{4(a + b)}.$$

Jinou metodu důkazů spolu s dalšími podobnými nerovnostmi najdete v článku J. Šimši *Dolní odhady rozdílu průměrů* in Rozhledy matematicko-fyzikální 65 (1986/87), číslo 10, str. 403–407.

Úlohy k procvičení:

5.1. Nechť $a$, $b$, $c$, $d$ jsou taková reálná čísla, že $a + d = b + c$. Dokažte nerovnost

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geqq 0.$$

[54–C–I–1]

5.2. Vyřešte nejprve úlohu 2.2 a potom dokažte, že pro každé kladné číslo $x$ platí $x + 1/x \geqq 2$. Kdy nastává rovnost?

5.3. Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla $a$, $b$ platí

$$\frac{a + b}{2} < \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

5.4. Určete všechna kladná čísla $x$, $y$, $z$, pro něž současně platí:

$$x + \frac{1}{y} \leqq 2,\ \ y + \frac{1}{z} \leqq 2,\ \ z + \frac{1}{x} \leqq 2.$$

[Sečtěte všechny tři vztahy a levou stranu odhadněte pomocí nerovnosti z úlohy 5.2.]

**6.** *Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší.*

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že nuly jsou na třetím a druhém místě zprava. Hledané číslo $x$ má pak tvar $x = 1\,000a + b$, kde $a$ je přirozené číslo (stejně jako v dalších případech) a $b$ nenulová číslice. Podmínku zadání $1\,000a + b = 89(10a + b)$ upravíme na tvar $5a = 4b$, z nějž plyne, že $b$ je násobek pěti. Vyhovuje tak jen $b = 5$ a $a = 4$, tedy $x = 4\,005$.

b) Jestliže hledané číslo $x$ má nuly na čtvrtém a třetím místě zprava, je $x = 10\,000a + b$, kde $b$ je dvojmístné číslo. Podmínku zadání $10\,000a + b = 89(100a + b)$ upravíme na tvar $25a = 2b$, z nějž plyne, že $b$ je lichý násobek čísla 25 (připomínáme, že $x$, a tedy ani $b$ není dělitelné deseti). Odtud $b = 25$, $a = 2$ nebo $b = 75$, $a = 6$, tedy $x \in \{20\,025, 60\,075\}$.

c) Jestliže hledané číslo $x$ má nuly na pátém a čtvrtém místě zprava, je $x = 100\,000a + b$, kde $b$ je trojmístné číslo. Podmínku zadání $100\,000a + b = 89(1\,000a + b)$ upravíme na tvar $125a = b$, z nějž plyne, že $b$ je lichý násobek čísla 125. Vyhovují pouze $b = 125$ a $a = 1$, $b = 375$ a $a = 3$, $b = 625$ a $a = 5$, $b = 875$ a $a = 7$, tedy $x \in \{100\,125, 300\,375, 500\,625, 700\,875\}$.

d) Z předchozích případů vidíme, že pro hledané číslo $x$ tvaru $x = 10^{n+2}a + b$, kde $b$ je $n$-místné číslo, dostáváme podmínku $10^{n+2}a + b = 89(10^n a + b)$ neboli $11 \cdot 10^n a = 88b$, odkud pro $n \geqq 4$ dostáváme podmínku $125 \cdot 10^{n-3}a = b$, podle níž je $b$ násobkem deseti. Žádné další $x$, které by vyhovovalo zadání, tedy neexistuje.

*Závěr.* Hledaná čísla jsou 4 005, 20 025, 60 075, 100 125, 300 375, 500 625, a 700 875.

Úlohy k procvičení:

6.1. Trojciferné číslo je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li tuto číslici na první místo (a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny), dostaneme číslo, které je o 81 menší než číslo původní. Určete původní číslo. [Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech, str. 7]

6.2. Najděte všechna čísla od 1 do 1 000 000, která se po škrtnutí první číslice 73krát zmenší. [45–Z7–I–2]

6.3. Najděte všechna čtyřmístná čísla $n$, která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla $n$ jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo $n$ je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla $n$, je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi. [58–C–I–3]

6.4. Klárka měla na papíru napsáno trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako číslo původní, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat? [57–C–I–6]

6.5. Určete největší dvojmístné číslo $k$ s následující vlastností: existuje přirozené číslo $N$, z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo $k$-krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu $k$ pak najděte nejmenší vyhovující číslo $N$. [56–C–II–4]