

## 59. ročník matematické olympiády

### Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Určete všechny hodnoty reálných parametrů  $p$  a  $q$ , pro něž má každá z rovnic

$$x(x - p) = 3 + q, \quad x(x + p) = 3 - q$$

v oboru reálných čísel dva různé kořeny, jejichž aritmetický průměr je jedním z kořenů zbylé rovnice.

2. Jsou dány délky odvěsen  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$  pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$ , přičemž  $a > b$ . Označme  $D$  střed přepony  $AB$  a  $E$  ( $E \neq C$ ) průsečík strany  $BC$  s kružnicí opsanou trojúhelníku  $ADC$ . Vypočítejte obsah trojúhelníku  $EAD$ .
3. Určete všechny dvojice celých kladných čísel  $m$  a  $n$ , pro něž platí  $37 + 27^m = n^3$ .

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

**ve čtvrtek 21. ledna 2010**

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulatory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

## 59. ročník matematické olympiády

### Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Z Viètových vztahů pro kořeny kvadratické rovnice (jež mimochodem plynou z rozkladu daného kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů) snadno zjistíme, že součet kořenů první rovnice je  $p$ , takže jejich aritmetický průměr je  $\frac{1}{2}p$ . Toto číslo má být kořenem druhé rovnice, proto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \quad (1)$$

Podobně součet kořenů druhé rovnice je  $-p$ , jejich aritmetický průměr je  $-\frac{1}{2}p$ , a proto

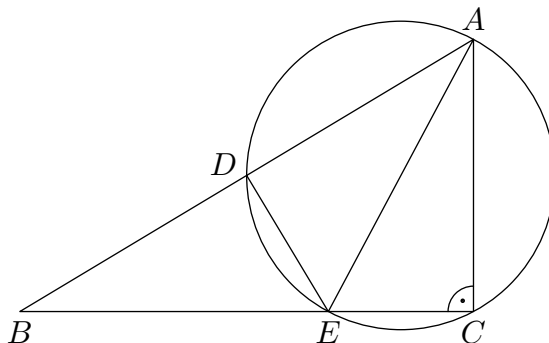
$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \quad (2)$$

Porovnáním obou vztahů (1) a (2) máme  $3 - q = 3 + q$  neboli  $q = 0$  a z (1) pak vyjde  $p = 2$  nebo  $p = -2$ .

Obě nalezená řešení vedou na tutéž dvojici rovnic  $x(x - 2) = 3$ ,  $x(x + 2) = 3$ . Kořeny první z nich jsou čísla  $-1$  a  $3$ , jejich aritmetický průměr je  $1$ . Kořeny druhé rovnice jsou čísla  $1$  a  $-3$ , jejich aritmetický průměr je  $-1$ .

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dva body udělte za zjištění, že aritmetické průměry kořenů jsou  $\frac{1}{2}p$  a  $-\frac{1}{2}p$ , jeden bod za soustavu rovnic (1), (2), dva body za její vyřešení a jeden bod za ověření, že každá z rovnic  $x(x - 2) = 3$ ,  $x(x + 2) = 3$  má dva různé reálné kořeny.

2. Označme  $c$  délku přepony  $AB$ , takže  $|AD| = |BD| = \frac{1}{2}c$ . Čtyřúhelník  $ADEC$  je třetivový a úhel  $ECA$  je pravý, proto i protilehlý úhel  $ADE$  je pravý (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  a  $EDB$  mají úhel u vrcholu  $B$  společný, proto  $\triangle ABC \sim \triangle EDB$ . Odtud



Obr. 1

$$\frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad \text{a proto} \quad |ED| = \frac{bc}{2a}.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku  $EAD$  je tak (s využitím Pythagorovy věty)

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{bc}{2a} = \frac{bc^2}{8a} = \frac{b(a^2 + b^2)}{8a}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho dva body za zjištění, že úhel  $ADE$  je pravý, jeden bod za podobnost trojúhelníků  $ABC$  a  $EDB$ , jeden bod za výpočet délky strany  $ED$  a dva body za dopočítání obsahu trojúhelníku  $EAD$ .

3. Rovnici upravíme na tvar  $37 = n^3 - 27^m$  a rozdíl třetích mocnin rozložíme na součin:

$$37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m).$$

Číslo 37 je prvočíslo a na pravé straně rovnosti je součin dvou celých čísel, přičemž druhý činitel je větší než 1. Proto musí platit

$$n - 3^m = 1 \tag{3}$$

a

$$n^2 + n \cdot 3^m + 9^m = 37. \tag{4}$$

Pro  $m \geq 2$  je  $n^2 + n \cdot 3^m + 9^m > 9^2 > 37$ , takže zbývá jediná možnost  $m = 1$ ; z (3) potom plyne  $n = 1 + 3^m = 4$ . Zkouškou se přesvědčíme, že  $37 + 27^1 = 4^3$ , nebo ověříme, že dvojice  $m = 1, n = 4$  vyhovuje podmínce (4).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za úpravu rovnice na tvar  $37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m)$ , 2 body za soustavu rovnic (3), (4), jeden bod za zdůvodnění rovnosti  $m = 1$  a jeden bod za určení hodnoty  $n$  a zkoušku správnosti. Za pouhé uhodnutí řešení nedávejte žádný bod.