59. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie B

1. Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je.

2. V matematické soutěži bylo zadáno 7 úloh a za každou z nich mohl soutěžící získat 0, 1 nebo 2 body. Soutěže se zúčastnilo 60 žáků. Za každou úlohu bylo uděleno aspoň 95 bodů. Dokažte, že mezi soutěžícími najdeme dva tak, že každou z úloh vyřešil aspoň jeden z nich za 2 body.

3. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$. Označme K, L, M po řadě středy stran AB, CD, AD. Předpokládejme, že body A, B, L, D leží na jedné kružnici a zároveň i body K, L, D, M leží na jedné kružnici. Dokažte, že $|AC| = 2 \cdot |AD|$.

4. Číslo n je součinem čtyř prvočísel. Jestliže každé z těchto prvočísel zvětšíme o 1 a vzniklá čtyři čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2 886 větší než původní číslo n. Určete všechna taková n.

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 30. března 2010

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

59. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie B

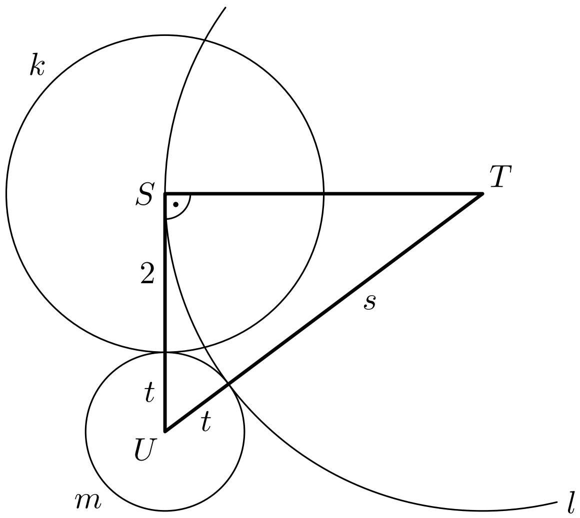
1. Trojúhelník UST je pravoúhlý. Jeho přepona UT má délku $s + t$, délky odvěsen jsou $|US| = t + 2$, $|ST| = s$ (obr. 1). Podle Pythagorovy věty proto platí

$$(s + t)^2 = (t + 2)^2 + s^2.$$

Úpravami postupně dostáváme

$$\begin{aligned} s^2 + 2st + t^2 &= t^2 + 4t + 4 + s^2, \\ st &= 2t + 2, \\ t(s - 2) &= 2. \end{aligned}$$

Čísla t a $s - 2$ jsou celá, proto t musí být dělitelem čísla 2. Protože t je kladné, jsou jen dvě možnosti; jestliže $t = 1\,\mathrm{cm}$, potom $s = 4\,\mathrm{cm}$, a jestliže $t = 2\,\mathrm{cm}$, potom $s = 3\,\mathrm{cm}$.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Udělte jeden bod za vyjádření délek stran trojúhelníku UST, dva body za použití Pythagorovy věty, jeden bod za úpravu na tvar $t(s - 2) = 2$ a dva body za nalezení obou řešení.

2. Nejdříve dokážeme, že každou úlohu vyřešilo za dva body aspoň 35 žáků: Kdyby totiž některou úlohu vyřešilo za 2 body a soutěžících, přičemž $a < 35$, bylo by za tuto úlohu uděleno nejvýše $2a + 60 - a = a + 60 < 95$ bodů, což odporuje zadání.

Z právě provedené úvahy tedy plyne, že celkový počet dvoubodových řešení je aspoň $7 \cdot 35 = 245$. Protože $245 > 4 \cdot 60$, musel některý žák vyřešit za dva body aspoň 5 úloh.

Dále budeme místo „vyřešit úlohu za dva body“ psát stručněji jen „vyřešit úlohu“. Jestliže některý žák vyřešil všech 7 úloh, stačí k němu do dvojice přidat libovolného jiného žáka. Jestliže některý žák vyřešil 6 úloh, přidáme k němu kteréhokoliv ze žáků, kteří vyřešili zbylou úlohu (máme z čeho vybírat, protože každou úlohu vyřešilo aspoň 35 žáků).

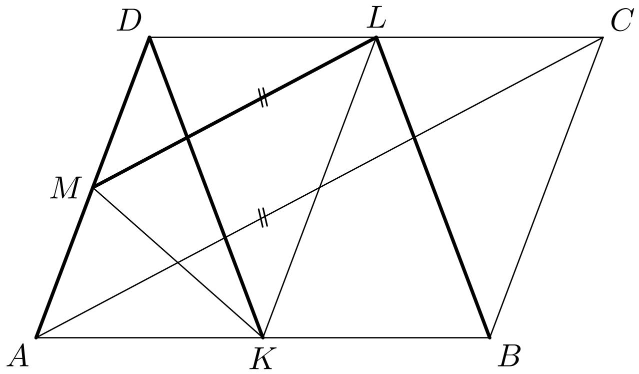
Zbývá tedy uvážit situaci, kdy některý soutěžící A vyřešil přesně 5 úloh. Každou ze dvou zbylých úloh vyřešilo aspoň 35 žáků (jiných než A). A protože všech žáků jiných než A je 59, musí mezi nimi být aspoň $2 \cdot 35 - 59 = 11$ takových, kteří vyřešili obě tyto úlohy. Stačí tudíž libovolného z nich přidat k žákovi A.

Jiné řešení. „Vyřešit úlohu“ bude znamenat totéž co v původním řešení.

Za všech 7 úloh dohromady bylo uděleno aspoň $95 \cdot 7 = 665 > 60 \cdot 11$ bodů, takže některý žák získal aspoň 12 bodů, a tudíž vyřešil aspoň pět úloh (žák, který vyřešil právě k úloh, získal totiž nejvýše $2k+(7-k) = k+7$ bodů). Vyberme tedy žáka A a 5 konkrétních úloh z těch, které vyřešil. Za zbylé dvě úlohy získalo zbylých 59 žáků aspoň $2 \cdot (95 - 2) = 186 > 3 \cdot 59$ bodů, takže jeden z nich, řekněme žák B, získal 4 body, a tudíž vyřešil obě úlohy. Dvojice žáků A, B má požadovanou vlastnost.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho jeden bod za poznatek, že každou úlohu vyřešilo za dva body aspoň 35 žáků, dva body za důkaz, že některý žák vyřešil aspoň 5 úloh. Za vyřešení úlohy pro případ, že některý soutěžící měl 6 nebo 7 dvoubodových úloh, dejte jeden bod, 2 body za vyřešení situace, kdy některý žák měl 5 dvoubodových úloh.

3. Lichoběžníky $ABLD$ a $KLDM$ jsou rovnoramenné, protože jsou tětivové. Odtud vyplývá shodnost ramen $|AD| = |BL|$ a shodnost úhlopříček $|KD| = |LM|$ (obr. 2). Střední příčka KL dělí rovnoběžník $ABCD$ na dva shodné rovnoběžníky, pro jejichž úhlopříčky platí $|KD| = |BL|$. Úsečka ML je střední příčkou trojúhelníku ACD, proto $|AC| = 2 \cdot |ML|$. Spojením výše uvedených rovností máme $|AC| = 2 \cdot |ML| = 2 \cdot |KD| = 2 \cdot |BL| = 2 \cdot |AD|$.



Obr. 2

Jiné řešení. Budeme postupovat stejně jako ve druhém řešení třetí úlohy domácího kola (na domácí kolo se lze odvolat bez dalšího důkazu): Protože $ABLD$ je tětivový (a tudíž rovnoramenný) lichoběžník, je $|KD| = |BL| = |AD|$. Podobně je i lichoběžník $KLDM$ rovnoramenný, takže $|MK| = |DL|$ a $|DB| = 2|MK| = 2|DL| = |DC| = |AB|$. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků AKD a DAB (shodují se v úhlu u vrcholu A svých základen) pak plyne, že $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$, odkud po dosazení $|AK| = \frac{1}{2}|AB|$ vychází $|DB| = |AB| = \sqrt{2} \cdot |AD|$. Nyní využijeme známou rovnoběžníkovou rovnost $|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AD|^2$. Dosazením za $|AB|$ a $|DB|$ dostaneme $|AC|^2 + 2 \cdot |AD|^2 = 4 \cdot |AD|^2 + 2 \cdot |AD|^2$ a odtud $|AC|^2 = 4 \cdot |AD|^2$ čili $|AC| = 2 \cdot |AD|$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho jeden bod za poznatek, že lichoběžníky $ABLD$ a $KLDM$ jsou rovnoramenné (tuto dobře známou vlastnost tětivových lichoběžníků není nutno dokazovat), po jednom bodu za každou z rovností $|AC| = 2 \cdot |ML|$, $|AD| = |BL|$, $|KD| = |LM|$, $|KD| = |BL|$ a jeden bod za jejich spojení.

V případě druhého postupu dejte 2 body za rovnosti $|BD| = |AB|$ a $|AB| = \sqrt{2} \cdot |AD|$, 2 body za použití rovnosti $|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AD|^2$ a dva body za dokončení důkazu.

4. Označíme-li a, b, c, d prvočísla, jejichž součinem je číslo n, platí rovnost

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = abcd + 2\,886.$$

Kdyby byla všechna čísla a, b, c, d lichá, bylo by na levé straně této rovnosti sudé číslo, kdežto na pravé straně číslo liché. Proto je některé z prvočísel a, b, c, d (například a) rovno dvěma. Dosazením dostaneme

$$3(b+1)(c+1)(d+1) = 2bcd + 2\,886.$$

Protože čísla $3(b+1)(c+1)(d+1)$ i $2\,886$ jsou dělitelná třemi, musí být dělitelné třemi i $2bcd$. Proto je některé z prvočísel b, c, d (například b) rovno třem. Dosazením dostaneme $12(c+1)(d+1) = 6cd + 2\,886$, po vydělení šesti $2(c+1)(d+1) = cd + 481$ a po dalších úpravách $cd + 2c + 2d = 479$, $(c+2)(d+2) = 483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$. Předpokládáme-li $c \leqq d$, máme vzhledem k nerovnosti $c + 2 > 3$ dvě možnosti:

1. $c + 2 = 7$, $d + 2 = 69$, odtud $c = 5$, $d = 67$.

2. $c + 2 = 21$, $d + 2 = 23$, odtud $c = 19$, $d = 21$, což nevyhovuje, neboť 21 není prvočíslo.

Jediné vyhovující n je tedy $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2\,010$.

Poznámka. Závěrečné úvahy lze také provést pomocí vyjádření

$$d = \frac{479 - 2c}{c+2} = \frac{483}{c+2} - 2;$$

$c + 2$ tak musí být některý z dělitelů čísla 483, který je větší než 3, tedy $c + 2 \in \in \{7, 21, 23, 69, 161, 483\}$ a $c \in \{5, 19, 21, 67, 159, 481\}$. Protože c i d jsou prvočísla, vyhovují pouze možnosti $c = 5$, $d = 67$ nebo $c = 67$, $d = 5$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho jeden bod za sestavení rovnosti $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = abcd+2\,886$, dva body za důkaz, že některé z prvočísel je rovno dvěma, jeden bod za důkaz, že některé z prvočísel je rovno třem, 1 bod za úpravu rovnice pro zbylá dvě prvočísla do tvaru umožňující další úvahy o dělitelnosti a 1 bod za konečné nalezení čísla n. Pokud řešitel číslo n jako letopočet pouze uhodne a provede zkoušku, udělte 1 bod.