

Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1, \\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1, \\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

ŘEŠENÍ. Levé strany daných rovnic mají (jako odmocniny) nezáporné hodnoty, proto z pravých stran plynou po řadě nerovnosti $z \geq 1$, $x \geq 1$ a $y \geq 1$.

Odmocnin v rovnicích se zbavíme jejich umocněním:

$$x^2 - y = (z - 1)^2, \quad y^2 - z = (x - 1)^2, \quad z^2 - x = (y - 1)^2,$$

umocněné rovnice sečteme a výsledek sečtení upravíme:

$$\begin{aligned}(x^2 - y) + (y^2 - z) + (z^2 - x) &= (z - 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2, \\ (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) &= (z^2 + x^2 + y^2) - 2(z + x + y) + 3, \\ x + y + z &= 3.\end{aligned}$$

Protože však z nerovností $x \geq 1$, $y \geq 1$ a $z \geq 1$ plyne sečtením $x + y + z \geq 3$, může být rovnost $x + y + z = 3$ splněna jedině tak, že $x = y = z = 1$. Zkouškou dosazením se přesvědčíme, že trojice $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je skutečně řešením (jediným, jak plyne z našeho postupu).

Dodejme, že pokud si nerovností $x, y, z \geq 1$ předem nepovšimneme, avšak vztah $x + y + z = 3$ po sečtení umocněných rovnic odvodíme, můžeme pak určenou hodnotu součtu $x + y + z$ uplatnit při sečtení původních (neumocněných) rovnic, a tak získat rovnici $\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = 0$ s jasným důsledkem: každá z odmocnin musí být rovna nule.

JINÉ ŘEŠENÍ. Protože pro trojice (x, y, z) , (y, z, x) a (z, x, y) vyjde soustava zadaných rovnic nastejno, stačí hledat pouze taková řešení (x, y, z) , ve kterých je první složka maximální, tj. platí $x \geq y$ a $x \geq z$.¹ Stejně jako v původním řešení si uvědomíme, že $x, y, z \geq 1$ (dále nám postačí pouze fakt², že $x, y, z \geq 0$).

Z předpokládané nerovnosti $x \geq z$ plyne pro pravé strany první a druhé nerovnice srovnání $x - 1 \geq z - 1$, takže stejnou nerovnost musí splňovat i odmocniny na levých stranách, tedy i příslušní odmocněnci: $y^2 - z \geq x^2 - y$ neboli $x^2 - y^2 \leq y - z$. Levá strana té poslední je nezáporná (díky předpokladu $x \geq y$), takže je taková i pravá strana: $y - z \geq 0$ neboli $y \geq z$. To ještě upravíme na nerovnost $y - 1 \geq z - 1$ mezi pravými

¹ Nerovnost $y \geq z$ ovšem předem zaručit nemůžeme. Pořadí neznámých x, y, z totiž nemůžeme měnit libovolně, ale pouze cyklicky.

² Budeme ho potřebovat kvůli ekvivalencím typu $a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b$.

stranami první a třetí rovnice, takže podle jejich levých stran dostaneme $z^2 - x \geq x^2 - y$ neboli $z^2 - x^2 \geq x - y$. Odtud a z předpokladu $x \geq y$ máme $z^2 - x^2 \geq 0$ neboli $z \geq x$. Dohromady tak platí $x \geq y \geq z \geq x$, musí tedy být $x = y = z$. Tehdy se zadaná soustava redukuje na jedinou rovnici $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$. Je snadné ukázat, že její jediné řešení v oboru reálných čísel je $x = 1$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Řešte $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} + \sqrt{x-9} + \sqrt{x-10} = 6$ v oboru reálných čísel. [Levá strana má smysl, jediné když $x \geq 10$. Její hodnota pro $x > 10$ je větší než $\sqrt{10-1} + \sqrt{10-6} + \sqrt{10-9} = 6$, takže $x = 10$ je jediné řešení.]

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{x^2 - y} = y - 1, \quad \sqrt{y^2 - x} = x - 1.$$

[Z rovnic plyne $x, y \geq 1$. Dále využijte buď toho, že po sečtení umocněných rovnic dostanete $x + y = 2$, nebo s ohledem na symetrii předpokládejte $x \geq y$ a z nerovnosti $y^2 - x \geq x^2 - y$ odvoďte $y \geq x$. Jediné řešení je $x = y = 1$.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - z = x^2, \quad z^2 - x = y^2. \quad [57-A-S-1]$$

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2), \quad y^2 + 2zx = 6(z + x - 2), \quad z^2 + 2xy = 6(x + y - 2). \quad [53-A-S-3]$$

D3. Zjistěte, pro která $p \in \mathbb{R}$ má soustava rovnic

$$x^2 + 1 = (p+1)x + py - z, \quad y^2 + 1 = (p+1)y + pz - x, \quad z^2 + 1 = (p+1)z + px - y$$

právě jedno řešení v oboru reálných čísel. [51-A-S-3]

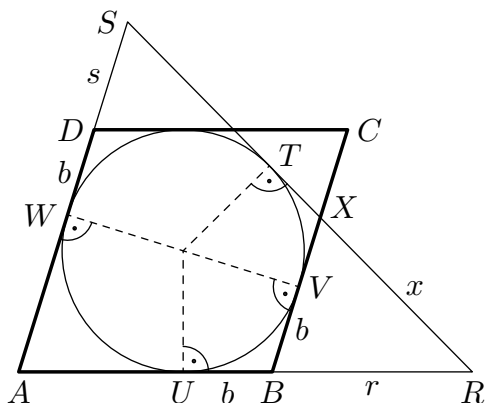
D4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - 1 = p(y + z), \quad y^2 - 1 = p(z + x), \quad z^2 - 1 = p(x + y).$$

s neznámými x, y, z a parametrem p . [51-A-II-4]

2. Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC, CD a označme po řadě R, S její průsečíky s přímkami AB, AD . Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí.

ŘEŠENÍ. Nechť U, V, W, T jsou body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, DA a s uvažovanou tečnou RS , jejíž průsečík se stranou BC pojmenujeme X (obr. 1). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné délky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ proměnné délky závislé na volbě tečny RS . Naším cílem je ukázat, že zadaný součin $|BR| \cdot |DS| (= r \cdot s)$ má stálou hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 1

Trojúhelníky ARS , BRX jsou stejnohlé podle středu R , neboť jejich strany AS a BX leží na rovnoběžných přímkách. Navíc kružnice vepsaná prvnímu trojúhelníku ARS je připsaná straně BX druhého trojúhelníku BRX . Podle poznatku ze závěru návodné úlohy N2 o tom, že body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdružené podle středu strany, na které oba body leží, můžeme usoudit, že poměru $|SW| : |AR|$ v trojúhelníku ARS odpovídá poměr $|BV| : |BR|$ v trojúhelníku BRX . To vede k rovnosti, kterou v zavedeném označení zapíšeme jako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkud} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tím je důkaz hotov a úloha vyřešena.

JINÉ ŘEŠENÍ. Užijeme stejné označení jako v původním řešení. Obejdeme se bez výsledků úlohy N2 tak, že označíme ještě $|RX| = x$ a vyjádříme délky stran obou stejnohlých trojúhelníků ARS , BRX na základě triviálního poznatku o rovnosti úseků tečen z daného bodu k dané kružnici (úloha N1). Pro $\triangle ARS$ je to snadné: platí $|AR| = a+r$, $|AS| = a+s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b+r) + (b+s) = 2b+r+s.$$

V trojúhelníku BRX předně máme $|BR| = r$ a délku třetí strany BX vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b+r) - x = 2b+r-x. \end{aligned}$$

Pro strany podobných trojúhelníků ARS a BRX tedy platí úměra

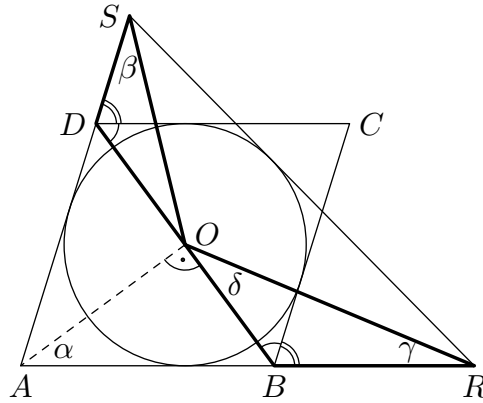
$$(a+r) : (2b+r+s) : (a+s) = r : x : (2b+r-x).$$

Odtud je možné eliminovat x a pak objevit závislost $rs = ab$. Místo takového postupu si však povšimněme, že obvod druhého trojúhelníku nezávisí na x , proto porovnáme poměry obvodu k první straně (na x nezávislé) v každém z obou trojúhelníků:

$$\begin{aligned} \frac{(a+r) + (2b+r+s) + (a+s)}{a+r} &= \frac{r+x+(2b+r-x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b+s)}{a+r} &= 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs &= ab. \end{aligned}$$

Potřebná rovnost je dokázána.

JINÉ ŘEŠENÍ. Překvapivě jednoduchý důkaz tvrzení úlohy podala studentka *Lenka Polcerová* z Gymnázia Křenová v Brně, když ukázala, že jsou podobné trojúhelníky ODS a RBO , kde O je střed kružnice vepsané kosočtverci $ABCD$ (obr. 2). Z této podobnosti totiž plyne úměra $|DS| : |DO| = |BO| : |BR|$ neboli $|BR| \cdot |DS| = |BO| \cdot |DO|$, což je konstantní hodnota (nezávislá na volbě tečny).



Obr. 2

Protože zmíněné trojúhelníky ODS a RBO se zřejmě shodují ve vnitřních úhlech u vrcholů D a B , stačí k důkazu jejich podobnosti ověřit shodnost úhlů $\beta = |\sphericalangle OSD|$ a $\delta = |\sphericalangle ROB|$. Zavedeme-li ještě úhly $\alpha = |\sphericalangle BAO|$ a $\gamma = |\sphericalangle ARO|$, pak z faktu, že kružnice vepsaná kosočtverci $ABCD$ je zároveň vepsána trojúhelníku ARS , plyne, že vnitřní úhly tohoto trojúhelníku jsou 2α , 2β , 2γ , takže platí $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Protože úhel AOB je pravý, vnitřní úhly trojúhelníku AOR mají velikost α , γ , $\delta + 90^\circ$, takže $\alpha + \gamma + \delta = 90^\circ$. Porovnáním obou uvedených rovností pro součet tří úhlů dostáváme kýženou rovnost $\beta = \delta$ a celý důkaz je hotov.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte rovnost $|AT_1| = |AT_2|$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku obou tečen vedených z bodu A k dané kružnici. [Využijte osovou souměrnost nebo shodnost trojúhelníků AT_1S a AT_2S (kde S je střed dané kružnice) podle věty *Ssu.*]
- N2. Vyjádřete délky všech úseků, na které jsou strany daného trojúhelníku rozděleny
- třemi body dotyku kružnice vepsané,
 - třemi body dotyku kružnic připsaných,
- pomocí délek a, b, c celých (tj. nerozdělených) stran. Z výsledku pak vypočítejte, že na každé straně trojúhelníku tvoří bod dotyku z a) a bod dotyku z b) dvojici bodů, které jsou souměrně sdružené podle středu dotyčné strany. [Jak úseky z části a), tak úseky z části b) mají délky $\frac{1}{2}(a + b - c)$, $\frac{1}{2}(b + c - a)$, $\frac{1}{2}(c + a - b)$. Vyplývá to ze soustav lineárních rovnic, které sestavíte na základě poznatku z úlohy N1, uplatněné vždy k tečnám ze všech tří vrcholů trojúhelníku k dané (vepsané či jedné připsané) kružnici.]
- N3. Kružnice vepsaná tečnovému lichoběžníku $ABCD$ se dotýká základů AB, CD po řadě v bodech E, F . Dokažte rovnost $|AE| \cdot |DF| = |BE| \cdot |CF|$. [Základny AB a CD vymezují spolu s průsečíkem prodloužených ramen BC, AD dva stejnohlé trojúhelníky, přitom kružnice vepsaná většímu z nich je připsaná základně menšího trojúhelníku. Z poznatků z úlohy N2 a úměrnosti délek stran obou trojúhelníků již plyne rovnost poměrů $|AE| : |BE|$ a $|CF| : |DF|$.]
- D1. Do téhož konvexního úhlu jsou vepsány dvě neprotínající se kružnice. Jejich společná vnitřní tečna s body dotyku K, L protne ramena úhlu v bodech A, B . Dokažte rovnost $|AK| = |BL|$. [Důsledek N2 — uvažte vztah obou kružnic k trojúhelníku ABV , kde V je vrchol daného úhlu. Anebo přímo: Necht' úsečka AB je rozdělena body K, L na úseky po řadě délek x, y, z . Užitím N1 odvoďte, že vzdálenosti bodů dotyku obou kružnic na jednotlivých ramenech jsou $2x + y$, resp. $2z + y$. Z N1 ovšem plyne $2x + y = 2z + y$, tj. $x = z$.]
- D2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB . Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC . Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné. [49–A–III–2]

3. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíslný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?

ŘEŠENÍ. Na tabuli zřejmě budou stále jen čísla z množiny $M = \{1, 2, \dots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budou napsána pořád, a to každé jedenkrát, protože nemají žádného dělitele různého od 1 a množina M ani neobsahuje žádný jejich násobek (takže nikdy nemohou z tabule zmizet, ani se objevit v dalším exempláři).

Vysvětlíme nyní, proč na tabuli budou kromě uvedených pěti prvočísel napsána vždy ještě některá dvě další čísla. Součin S všech čísel zapsaných na tabuli je na počátku roven

$$S = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31. \quad (1)$$

V každém kroku zvolíme nějakou dvojici čísel (x, y) s vlastností $x \mid y$, tedy čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme je jedním číslem $y/x = k$. Součin všech čísel na tabuli se přitom změní z dosavadní hodnoty S na novou hodnotu S/a^2 , neboť dva činitele x, y o součinu $xy = ka^2$ přejdou v jeden nový činitel k (a ostatní činitele se nezmění). Je jasné, že při změně $S \rightarrow S/a^2$ se exponent libovolného prvočinitele p z rozkladu čísla S buďto zachová (pokud $p \nmid a$), nebo sníží o sudé číslo (rovné exponentu p v rozkladu čísla a^2). V žádném případě se tedy nezmění *parita* (sudá–lichá) exponentu žádného z prvočinitelů. Proto každé z prvočísel, které mělo na počátku v rozkladu (1) *lichý* exponent, bude mít lichý exponent v rozkladu měnícího se S i po libovolném počtu kroků. Taková jsou (kromě 17, 19, 23, 29 a 31) rovněž prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budou stále zastoupena (ne nezbytně čtyři různá) čísla, která jsou těmito jednotlivými čtyřmi prvočísly dělitelná. Nemůže to být ovšem jediné číslo (neboť $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musí být aspoň dvě čísla, například 10 a 33 (nebo 11 a 30 anebo 15 a 22, jiné možnosti při celkovém počtu sedmi čísel na tabuli neexistují). Tak jsme dokázali, že na tabuli bude skutečně vždy napsáno nejméně 7 čísel.

Zbývá popsat nějakou posloupnost kroků, po níž na tabuli 7 čísel zůstane. Existuje mnoho možností, můžeme například dát „stranou“ prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a se zbylými čísly provést následující kroky:

$$\begin{aligned} 32, 16 \rightarrow 2, \quad 30, 15 \rightarrow 2, \quad 28, 14 \rightarrow 2, \quad 26, 13 \rightarrow 2, \quad 24, 12 \rightarrow 2, \quad 22, 11 \rightarrow 2, \\ 27, 9 \rightarrow 3, \quad 21, 7 \rightarrow 3, \quad 18, 6 \rightarrow 3, \quad 25, 5 \rightarrow 5, \quad 20, 4 \rightarrow 5, \quad 8, 2 \rightarrow 4, \\ 5, 5 \rightarrow 1, \quad 4, 2 \rightarrow 2, \quad 3, 3 \rightarrow 1, \quad 3, 3 \rightarrow 1, \quad 2, 2 \rightarrow 1, \quad 2, 2 \rightarrow 1, \quad 2, 2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Po těchto krocích už je na tabuli (kromě sedmi čísel stranou) už jen 7 jedniček, které všechny odstraníme šesti kroky $1, 1 \rightarrow 1$ a posledním krokem např. $10, 1 \rightarrow 10$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Určete, kolika nulami končí dekadický zápis čísla $33!$. [Sedmi nulami. Stačí zjistit, s jakými exponenty vystupují prvočísla 2 a 5 v rozkladu daného faktoriálu na prvočinitele. Lze to provést konkrétním rozбором součinu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33$, nebo využít známou poučku: počet výskytů prvočísla p v rozkladu čísla $n!$ na prvočinitele je roven součtu

$$\left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x a sčítání probíhá, dokud mocnina p^k ve jmenovateli zlomku nepřevyšuje čísel n . Celý rozklad čísla $33!$ je uveden v řešení soutěžní úlohy.]

- N2. Dokažte, že číslo $N = 46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49!$ není druhou mocninou celého čísla, a pak najděte jeho největší dělitel, který je druhou mocninou celého čísla. [Číslo N není druhou mocninou, protože v jeho rozkladu na prvočinitele vystupuje prvočíslo 47 s lichým exponentem 3. Z vyjádření $N = (46!)^4 \cdot 47 \cdot (47 \cdot 48) \cdot (47 \cdot 48 \cdot 49) = (46!)^4 \cdot 47^3 \cdot (48^2) \cdot 7^2$ plyne, že největší druhou mocninou, která je dělitelem čísla N , je číslo $(46!)^4 \cdot 47^2 \cdot 48^2 \cdot 7^2 = N/47$.]
- N3. Najděte nejmenší celé kladné n , pro něž existuje pořadí $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ čísel 1, 2, \dots , 10, jež vyhovuje rovnici

$$\frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}} = \frac{1}{n}.$$

[Hledané n je rovno 7. Protože $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, nelze zlomek v levé straně rovnice krátit číslem 7, takže musí být $n \geq 7$. Hodnotě $n = 7$ odpovídá například platná rovnost $\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1}{7}$.]

- N4. Na tabuli je zapsáno sedm čísel p^2 , pq , q^2 , p^3 , p^2q , pq^2 a q^3 , kde p a q jsou dvě různá prvočísla. Po šesti krocích popsanych v soutěžní úloze zůstalo na tabuli jediné číslo. Určete ho bez rozboru všech možných postupů, jakými lze jednotlivé kroky volit. [Poslední číslo na tabuli bude pq . Součin všech čísel na tabuli je na počátku $p^9 q^9$, a proto po každém kroku bude mít hodnotu $p^m q^n$ s lichými exponenty m a n , jak je vysvětleno v řešení soutěžní úlohy. Pro číslo $p^m q^n$, které jako jediné zůstane nakonec, navíc musí platit $m + n \leq 3$ (jako pro každé číslo, jež dostaneme v průběhu prováděných kroků), takže musí být $m = n = 1$. Možný postup kroků: $p^3, p^2 \rightarrow pq$; $q^3, q^2 \rightarrow pq$; $p^2q, p \rightarrow pq$; $pq^2, q \rightarrow pq$; $pq, pq \rightarrow 1$; $pq, 1 \rightarrow pq$.]
- D1. V každém vrcholu pravidelného 2008-úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:
- a) na 8 hromádek po 251 minci, b) na 251 hromádek po 8 mincích. [58–A–I–5]
- D2. V každém z vrcholů pravidelného n -úhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k , $1 \leq k \leq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí. [58–A–III–5]
- D3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které lze dostat doplněním závorek do výrazu

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2.$$

[48–A–I–1]

- D4. Do čitatele i jmenovatele zlomku

$$\frac{29 : 28 : 27 : 26 : 25 : 24 : 23 : 22 : 21 : 20 : 19 : 18 : 17 : 16}{15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2}$$

smíme opakovaně vpisovat závorky, a to vždy na stejná místa pod sebe.

- a) Určete nejmenší možnou celočíselnou hodnotu výsledného výrazu.
b) Najděte všechny možné celočíselné hodnoty výsledného výrazu. [48–A–III–1]

4. V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O , V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S , právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60° .

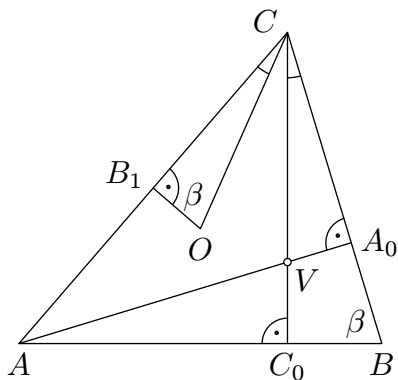
ŘEŠENÍ. Nejprve ukážeme, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC platí

$$\gamma = 60^\circ \iff |CO| = |CV|. \quad (1)$$

K tomu uvážíme trojúhelníky CVA_0 a COB_1 , kde A_0 je pata výšky z vrcholu A a B_1 je střed strany AC (obr. 3). Z pravouhelného trojúhelníku CA_0 plyne

$$\gamma = 60^\circ \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Poslední je rovnost délek odvěsen pravoúhlých trojúhelníků CVA_0 a COB_1 , jejichž vyznačené vnitřní úhly VCA_0 a OCB_1 mají shodnou velikost $90^\circ - \beta$. (Pro úhel VCA_0 to plyne z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 , kde C_0 je pata výšky z vrcholu C na stranu AB , pro úhel OCB_1 to plyne z rovnoramenného trojúhelníku ACO , který má u hlavního vrcholu O úhel 2β díky větě o obvodovém a středovém úhlu v opsané kružnici.) Proto je shodnost odvěsen CA_0 , CB_1 ekvivalentní se shodností přepon CO a CV , což dokazuje (1).



Obr. 3

Nyní zapojíme do úvah střed S kružnice vepsané. Ze zmíněné shodnosti úhlů VCA_0 a OCB_1 plyne, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC je polopřímka CS nejen osou úhlu ACB , ale také osou úhlu OCV . Tato osa je v případě $\gamma = 60^\circ$, kdy jak víme $|CO| = |CV|$, osou základny OV rovnoramenného trojúhelníku OVC (body O a V jsou různé, neboť podle zadání úlohy je trojúhelník ABC různoramenný), takže střed S na ose úsečky OV skutečně leží. Stejně tak tomu je i v případech $\alpha = 60^\circ$, resp. $\beta = 60^\circ$.

Připusťme nyní, že střed S leží na ose úsečky OV , avšak žádný z úhlů α , β , γ není 60° . Podle (1) tudíž platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Podívejme se znovu na trojúhelník OVC , v němž tedy osa CS vnitřního úhlu OCV nesplývá s osou protější strany OV , takže jejich jediný společný bod S leží na kružnici trojúhelníku OVC opsané (tento známý fakt uvádíme v úloze N2). Jinak řečeno, bod C leží na kružnici opsané trojúhelníku OVS . Ze stejných důvodů na této kružnici leží i body A a B , takže se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABC , která však nikdy svým středem O neprochází. Tak jsme dostali spor, který ukazuje, že připuštěná situace nemůže nastat. Tím je řešení celé úlohy u konce.

Poznámka 1. Z druhé části řešení vyplývá tento poznatek: má-li úhel γ (ostroúhlého) trojúhelníku ABC velikost 60° , leží vrcholy A a B na jedné kružnici s průsečíkem výšek, středem opsané kružnice i středem vepsané kružnice. Jednodušší zdůvodnění nabízíme v úloze N1.

Poznámka 2. Klíčovou ekvivalenci (1) z podaného řešení lze rovněž dokázat trigonometricky. Platí totiž vzorce

$$|CO| = \frac{c}{2 \sin \gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad (2)$$

podle kterých jsou úsečky CO a CV shodné, právě když je úhel γ řešením rovnice $2 \sin \gamma = \operatorname{tg} \gamma$, která je zřejmě ekvivalentní s rovnicí $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, jež má v intervalu

($0^\circ, 90^\circ$) jediné řešení $\gamma = 60^\circ$. První ze vzorců (2) plyne z tzv. rozšířené sinové věty

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC , o druhém vzorci v (2) pojednává úloha D1.

Poznámka 3. Ekvivalenci (1) z podaného řešení můžeme dokázat i bez velkého počítání: průsečík výšek daného trojúhelníku totiž vždy leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí trojúhelníku opsanou podle přímky AB (v našem případě). Vzhledem k tomu, že taková kružnice je zároveň obrazem kružnice opsané v posunutí o vektor \mathbf{CV} , závisí velikost $|CV|$ v dané opsané kružnici jen na velikosti tětiny AB (či odpovídajícím obvodovém úhlu), a nikoli na poloze bodu C . Proto rovnost $|CV| = r = |CO|$ nastane, právě když zmíněná sdružená kružnice prochází středem O kružnice trojúhelníku opsané, tj. právě když příslušná strana leží proti (obvodovému) úhlu velikosti 60° .

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC (při označení O, S, V ze sou-těžní úlohy) platí $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$, $|\sphericalangle ASB| = 90^\circ + \gamma/2$, $|\sphericalangle AVB| = 180^\circ - \gamma$. Jaký důsledek mají tyto rovnosti v případě $\gamma = 60^\circ$? [První rovnost je vztahem obvodového a středového úhlu, pro druhou, resp. třetí rovnost uvažte, že v trojúhelníku ASB , resp. AVB mají dva vnitřní úhly velikosti $\alpha/2$ a $\beta/2$, resp. $90^\circ - \alpha$ a $90^\circ - \beta$, a v obou případech dopočtete třetí úhel. Protože body O, S, V leží ve stejné polorovině vy-táté přímkou AB , v případě $\gamma = 60^\circ$ ze shodnosti úhlů AOB, ASB, AVB (všechny tři jsou 120°) plyne, že body A, B, O, S, V leží na jedné kružnici.]
- N2. Pokud strany KM a LM daného trojúhelníku KLM nejsou shodné, protne osa vnitř-ního úhlu KML osu strany KL v bodě, který leží na kružnici, která je trojúhelníku KLM opsána. Dokažte. [Snažší je dokázat obecnější tvrzení, že osa vnitřního úhlu protne opsanou kružnici v bodě, který má stejnou vzdálenost od zbývajících dvou vr-cholů trojúhelníku. Ze shodnosti dvou obvodových úhlů v kružnici totiž plyne shodnost příslušných tětin.]
- N3. V rovině je dána úsečka AB . Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC , pro něž platí: Vrcholy A a B , průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici. [A-55-III-4]
- D1. Dokažte, že pro vzdálenosti průsečíku V výšek od vrcholů ostroúhlého trojúhelníku ABC platí vzorce

$$|AV| = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad |BV| = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}, \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

[Jsou-li AA_0, CC_0 výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC a V jejich průsečík, platí $|CA_0| = b \cos \gamma$. Pravoúhlý trojúhelník CA_0V má u vrcholu C úhel $90^\circ - \beta$, takže $|CA_0| = |CV| \cos(90^\circ - \beta) = |CV| \sin \beta$. Porovnáním dostaneme $b \cos \gamma = |CV| \sin \beta$, což spolu s rovností $b/\sin \beta = c/\sin \gamma$ (sinová věta) dává $|CV| = (b/\sin \beta) \cdot \cos \gamma = (c/\sin \gamma) \cdot \cos \gamma = c/\operatorname{tg} \gamma$. Třetí ze vzorců je dokázán, první dva platí z důvodů symetrie.]

5. V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n -tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese.

ŘEŠENÍ. Pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ označme r_k počet ryb v kádi poté, co si k -tý rybář odnese svůj díl. Tyto počty jsou podle zadání určeny počáteční hodnotou r_0 a rekurentními vztahy

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Zapišme je ve výhodném tvaru

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{kde } q = \frac{n-1}{n} \quad \text{a} \quad d = \frac{1-n}{n}. \quad (1)$$

Rekurentní rovnice $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ ($q, d = \text{konst.}$) je poměrně obvyklá v řadě aplikací. Odvodíme proto nejprve, jaké přímé vyjádření má každý člen r_k takové posloupnosti r_0, r_1, r_2, \dots při obecných q, d a dané počáteční hodnotě r_0 . Teprve poté se vrátíme k naší úloze a do výsledku dosadíme hodnoty q, d připsané v (1).

Všimněme si předně, že v případě $q = 1$ dostáváme rovnici $r_{k+1} = r_k + d$, podle které je zkoumaná posloupnost aritmetická s diferencí d , takže její obecný člen má vyjádření $r_k = r_0 + kd$. V případě $q \neq 1$ z rekurentní rovnice postupně dostaneme

$$\begin{aligned} r_1 &= qr_0 + d, \\ r_2 &= qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2r_0 + (q+1)d, \\ r_3 &= qr_2 + d = q(q^2r_0 + (q+1)d) + d = q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d, \\ r_4 &= qr_3 + d = q(q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Takto nacházíme vyjádření

$$r_k = q^k r_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1)d.$$

Uplatníme-li známý vzorec pro součet k členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q \neq 1$, dojdeme k závěru, že pro každé $k \geq 0$ je člen r_k dán přímým vzorcem

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k - 1)d}{q - 1} = q^k \left(r_0 + \frac{d}{q - 1} \right) - \frac{d}{q - 1}.$$

V našem konkrétním případě platí

$$\frac{d}{q - 1} = \frac{(1 - n)/n}{(n - 1)/n - 1} = n - 1,$$

odkud nacházíme vyjádření jednotlivých hodnot r_k ve tvaru

$$r_k = \frac{(n - 1)^k (r_0 + n - 1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Vzhledem k nesoudělnosti dvojice čísel $(n - 1)^k, n^k$ jsou takové hodnoty r_k celočíselné, právě když je číslo $r_0 + n - 1$ dělitelné všemi zastoupenými mocninami n^k , z nichž nejvyšší

je mocnina n^n . Hledaná nutná i postačující podmínka má proto tvar: pro některé celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$ neboli $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocí tohoto parametru j pak mají všechny členy r_k vyjádření

$$r_k = j \cdot (n-1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Zbývá zjistit nejmenší celé $j \geq 1$, při kterém jsou všechna čísla r_k daná vztahy (2) kladná. Protože tato čísla zřejmě tvoří klesající posloupnost, nejmenší z nich je číslo $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, což je při $n \geq 3$ číslo kladné již při $j = 1$ (tehdy $r_0 = n^n - n + 1$), zatímco při $n = 2$ to platí až při $j = 2$ (tehdy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpověď: Hledaný nejmenší počet ryb je $r_0 = 7$ pro $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pro každé $n \geq 3$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Posloupnost r_0, r_1, \dots, r_n můžeme počítat i „odzadu“, tj. pomocí posledního členu r_n vyjadřovat členy předchozí. S využitím rekurentního vztahu

$$r_k = qr_{k+1} + 1, \quad \text{kde} \quad q = \frac{n}{n-1}$$

(kvocient q má nyní převrácenou hodnotu oproti hodnotě v původním řešení), postupně pro $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ dostáváme:

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= qr_n + 1, \\ r_{n-2} &= qr_{n-1} + 1 = q^2 r_n + q + 1, \\ r_{n-3} &= qr_{n-2} + 1 = q^3 r_n + q^2 + q + 1, \\ r_{n-4} &= qr_{n-3} + 1 = q^4 r_n + q^3 + q^2 + q + 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podobně jako v původním řešení (sčítání členů geometrické posloupnosti a následné dosazení kvocientu q zde vynecháme) tak dospějeme ke vzorcům

$$r_{n-k} = \frac{n^k (r_n + n - 1)}{(n-1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3)$$

Protože čísla n^k a $(n-1)^k$ jsou nesoudělná, hodnoty r_{n-k} jsou vesměs celočíselné, právě když $(n-1)^n \mid r_n + n - 1$, neboli $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čemuž odpovídá (podle vzorce (3) pro $k = n$) počáteční hodnota $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak jsme došli ke stejnému závěru jako při původním postupu.

Poznámka. Nalezení vzorců pro členy r_k se při obou postupech značně zjednoduší, když si povšimneme, že pozměněná posloupnost tvořená čísly $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická. Na tuto možnost řešení rekurentních rovnic (1) upozorníme v úloze N2.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte vzorec pro obecný člen posloupnosti zadané rekurentně:

- $x_0 = 2, x_{k+1} = 2x_k - 3,$
- $x_0 = \frac{1}{6}, x_{k+1} = 4x_k + 1,$
- $x_0 = 2, x_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot (4 - x_k).$

- [Jedná se o rovnice tvaru $x_{k+1} = qx_k + d$, takže je můžeme řešit metodou popsanou v řešení soutěžní úlohy. Výsledky: a) $x_k = 3 - 2^k$, b) $x_k = \frac{1}{2} \cdot 4^k - \frac{1}{3}$, c) $x_k = (-\frac{1}{3})^k + 1$.]
- N2. Příklady z N1 řešte odlišným postupem: ukažte, že rovnici $x_{k+1} = qx_k + d$ lze v případě $q \neq 1$ upravit na tvar $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ s vhodnou konstantou c . Jakmile takové c najdete, dostanete geometrickou posloupnost čísel $x_k - c$, pro kterou okamžitě vychází $x_k - c = q^k(x_0 - c)$ neboli $x_k = c + q^k(x_0 - c)$. [Upravené rovnice jsou a) $x_{k+1} - 3 = 2(x_k - 3)$, b) $x_{k+1} + \frac{1}{3} = 4(x_k + \frac{1}{3})$, c) $x_{k+1} - 1 = -\frac{1}{3}(x_k - 1)$. Obecně jsou rovnice $x_{k+1} = qx_k + d$ a $x_{k+1} - c = q(x_k - c)$ ekvivalentní, právě když platí $d = c - qc$, tj. vyhovující c je tvaru $c = d/(1 - q)$.]
- D1. Když k číslu x_0 přičteme 2 a výsledek vydělíme třemi, dostaneme číslo x_1 . Podobně z čísla x_1 dostaneme číslo x_2 , z čísla x_2 číslo x_3 atd. Pro dané n určete všechna ta celá čísla x_0 , pro něž jsou rovněž celá i všechna čísla x_1, x_2, \dots, x_n . [Podle rekurentní rovnice $x_{k+1} = \frac{1}{3}(x_k + 2)$ přepsané metodou z úlohy N2 do tvaru $x_{k+1} - 1 = \frac{1}{3}(x_k - 1)$ mají čísla x_k obecné vyjádření $x_k = 1 + (x_0 - 1)/3^k$. Všechna čísla x_0, x_1, \dots, x_n (při daném n) jsou tedy celá, právě když je číslo $x_0 - 1$ celým násobkem každé z mocnin $3^0, 3^1, \dots, 3^n$, tj. právě když $x_0 = j \cdot 3^n + 1$ pro některé celé j .]

6. Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y .

ŘEŠENÍ. V zadané rovnici bude výhodné přejít od nejmenších společných násobků k největším společným dělitelům, a to pomocí známého vztahu $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$ (viz úlohu N3). Označme proto $u = (a, c)$, $v = (b, c)$ a levou stranu rovnice přepišme takto:

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{ac/u + bc/v}{a + b} = \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right) \cdot \frac{c}{a + b}.$$

Zadanou rovnici lze proto (po vynásobení zlomkem $(a + b)/c$) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b). \quad (1)$$

Porovnejme odhady velikosti výrazů v (1). Protože $p^2 > 0$, pro zlomek na pravé straně (1) zřejmě platí

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} < 1,$$

takže v důsledku (1) musí být

$$\frac{a + b}{2} < \frac{a}{u} + \frac{b}{v} < a + b. \quad (2)$$

Díky levé nerovnosti nemohou být obě přirozená čísla u, v větší než 1, neboť z nerovností $u \geq 2$ a $v \geq 2$ bychom dostali

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je tedy rovno jedné. Pravá nerovnost v (2) však vylučuje případ $u = v = 1$. Číslu 1 se tudíž rovná právě jedno z čísel u, v . S ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $u = 1$ a $v \geq 2$.

Protože číslo v jsme zavedli vztahem $v = (b, c)$, je zlomek b/v roven některému přirozenému číslu b_1 . Dosadíme nyní hodnoty $u = 1$ a $b = b_1v$ do (1) a vzniklou rovnicí vyřešíme vzhledem k proměnné a :

$$\begin{aligned} a + b_1 &= \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b_1v), \\ (p^2 + 2)(a + b_1) &= (p^2 + 1)(a + b_1v), \\ a &= b_1((p^2 + 1)v - p^2 - 2). \end{aligned} \tag{3}$$

Kdyby platilo $v \geq 3$, dostali bychom z poslední rovnosti odhad

$$a \geq (p^2 + 1)v - p^2 - 2 \geq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

a to je ve sporu s nerovností $a \leq 2p^2$ danou oborem, ve kterém podle zadání úlohy mají hodnoty a, b, c ležet. Platí tedy opačná nerovnost $v < 3$, která spolu s předpokladem $v \geq 2$ vede k závěru, že nutně $v = 2$. Rovnice (3) tak přechází v rovnici

$$a = b_1(2(p^2 + 1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

kterou v zadaném oboru hodnot a , množině $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, snadno vyřešíme.

Protože je tedy $a \leq 2p^2$, je $b_1 \leq 2$. Přitom z podmínek $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ plyne, že c je sudé číslo s číslem a nesoudělné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak plyne, že $b_1 = 1$ a p je *liché* prvočíslo. Je tudíž $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pro číslo c to znamená následující zpřesnění: *c je sudé číslo, které není násobkem daného prvočísla p .*

Která $c \in \{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$ takovou podmínku splňují a kolik jich je? Jak už víme, pro $p = 2$ žádné takové c neexistuje. Pro liché p pak ze všech p^2 možných sudých čísel $c = 2, 4, 6, \dots, 2p^2$ vyloučíme všechny násobky čísla p , tedy právě p čísel $2p, 4p, \dots, 2p^2$; vyhovujících hodnot je proto právě $p^2 - p$. Takový je tedy počet všech hledaných trojic $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozebraném případě, kdy $u = 1$ a $v \geq 2$. Ve druhém možném případě, kdy naopak $v = 1$ a $u \geq 2$, existuje s ohledem na symetrii stejný počet $p^2 - p$ vyhovujících trojic, které jsou tentokrát všechny tvaru $(2, p^2, c)$. (Popis vyhovujících trojic zahrneme i do odpovědi, přestože to zadání úlohy nevyžaduje.)

Odpověď: V případě $p = 2$ žádné vyhovující trojice neexistují, v případě lichého prvočísla p je jich právě $2(p^2 - p)$ a všechny jsou tvaru

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{nebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

kde $c \in \{1, 2, \dots, 2p^2\}$ je libovolné sudé číslo, které není násobkem p .

JINÉ ŘEŠENÍ. Definujme přirozená čísla u, v, m, n vztahy $u = (a, c)$, $v = (b, c)$, $a = mu$ a $b = nv$. Pak $[a, c] = mc$, $[b, c] = nc$ a po dosazení do zadané rovnice po malé úpravě včetně zkrácení číslem c dostaneme

$$(p^2 + 2)(m + n) = (p^2 + 1)(mu + nv).$$

Díky nesoudělnosti čísel $p^2 + 1$ a $p^2 + 2$ existuje přirozené číslo k takové, že

$$m + n = k(p^2 + 1) \quad \text{a} \quad mu + nv = k(p^2 + 2). \quad (1)$$

Vyřešme nyní soustavu rovnic (1) pro neznámé m a n , pokládaje u a v za parametry. Zřejmě $u \neq v$, předpokládejme tedy dále, že $u > v$ (případ $u < v$ se díky symetrii rozebere stejně). Soustava (1) má jediné řešení

$$m = \frac{k(p^2 + 2 - v(p^2 + 1))}{u - v} \quad \text{a} \quad n = \frac{k(u(p^2 + 1) - p^2 - 2)}{u - v}.$$

Z nerovností $u - v > 0$ a $m > 0$ plyne $p^2 + 2 - v(p^2 + 1) > 0$ neboli

$$v < \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1} = 1 + \frac{1}{p^2 + 1} < 2,$$

takže nutně platí $v = 1$ a vzorce pro m , n přejdou do tvaru

$$m = \frac{k}{u - 1} \quad \text{a} \quad n = \frac{k(u(p^2 + 1) - p^2 - 2)}{u - 1} = m(u(p^2 + 1) - p^2 - 2).$$

Kdyby pro číslo $u > 1$ platilo $u \geq 3$, měli bychom z poslední rovnosti

$$n \geq u(p^2 + 1) - p^2 - 2 \geq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

což je ve sporu s tím, že $n = nv = b \leq 2p^2$. Je tedy nutně $u = 2$ a vzorce pro m , n získávají definitivní podobu

$$m = k \quad \text{a} \quad n = kp^2,$$

tudíž (s ohledem na $n \leq 2p^2$) musí být buď $k = 1$, nebo $k = 2$.

Je-li $k = 1$, máme $a = mu = 2$, $b = nv = p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (2, c) = 2$ a $(b, c) = (p^2, c) = 1$. Taková čísla c existují, jen když je prvočíslo p liché, a v zadaném intervalu jich je právě $p^2 - p$.

Je-li $k = 2$, máme $a = 4$ a $b = 2p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (4, c) = 2$ a $(b, c) = (2p^2, c) = 1$. Žádné takové c (které by bylo sudé i liché) zřejmě neexistuje.

V případě $u < v$ s ohledem na symetrii existuje rovněž $p^2 - p$ vyhovujících trojic, takže jejich celkový počet je $2(p^2 - p)$ (je-li ovšem $p = 2$, žádná zkoumaná trojice neexistuje).

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Určete, pro která přirozená čísla a , b , c platí $[a, c] + [b, c] = (a + b)c$. [Jsou to právě ty trojice, ve kterých je číslo c nesoudělné jak s číslem a , tak s číslem b . Sečtením zřejmých nerovností $[a, c] \leq ac$ a $[b, c] \leq bc$ dostaneme $[a, c] + [b, c] \leq (a + b)c$, přitom rovnost nastane, právě když $[a, c] = ac$ a $[b, c] = bc$.]

N2. Určete, kolik (uspořádaných) dvojic přirozených čísel a , b splňuje rovnici

$$\text{a) } [a, 70] + [b, 70] = 210, \quad \text{b) } \frac{1}{[a, 30]} + \frac{1}{[b, 30]} = \frac{1}{30}.$$

[a) 64 dvojic, b) 16 dvojic. Ad a): Součet $[a, 70] + [b, 70]$ dvou násobků čísla 70 musí být tvaru $70 + 140$, nebo $140 + 70$. Jedno z čísel $[a, 70]$, $[b, 70]$ je tedy 70, druhé je 140. Rovnici $[x, 70] = 70$ splňují právě ta x , jež jsou děliteli čísla $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ (je jich 8), řešeními rovnice $[y, 70] = 140$ jsou právě čísla $y = 4d$, kde d je dělitel čísla $35 = 5 \cdot 7$ (jsou tedy 4). Proto má původní rovnice $2 \cdot 8 \cdot 4 = 64$ řešení. Ad b): Jmenovatelé obou zlomků z levé strany rovnice jsou násobky třiceti, žádný se však nemůže rovnat

číslo 30, jak plyne z porovnání s pravou stranou rovnice. Musí tedy platit $[a, 30] \geq 60$ a $[b, 30] \geq 60$, odkud $\frac{1}{[a, 30]} + \frac{1}{[b, 30]} \leq \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$. Rovnost nastane, právě když $[a, 30] = [b, 30] = 60$ neboli $a = 4m$ a $b = 4n$, kde m, n jsou dělitelé čísla $15 = 3 \cdot 5$. Ty jsou čtyři, takže všech dvojic a, b je $4^2 = 16$.]

- N3. Dokažte, že největší společný dělitel (x, y) a nejmenší společný násobek $[x, y]$ libovolných přirozených čísel x a y splňují rovnost $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$. [Využijte rovnosti $\min\{u, v\} + \max\{u, v\} = u + v$ pro exponenty u, v každého prvočísla v rozkladech čísel x a y na prvočinitele.]
- D1. Určete, pro která přirozená čísla a, b platí $[a, b] + (a, b) = a + b$. [Vyhovují právě ty dvojice čísel a, b , pro něž platí $a \mid b$ nebo $b \mid a$. Označme $d = (a, b)$, pak $a = ud, b = vd$, $[a, b] = uvd$ a daný vztah je tvaru $uvd + d = d(u + v)$ neboli $uv + 1 = u + v$, což lze upravit na $(u - 1)(v - 1) = 0$. To platí, právě když je alespoň jedno z čísel u, v rovno jedné, tedy právě když $d = a$ nebo $d = b$. Jinak vyjádřeno, jedno z čísel a, b je dělitelem druhého čísla.]
- D2. Rozhodněte, zda součet některých dvou přirozených čísel je dělitelem jejich nejmenšího společného násobku. [Ne. Pripusťme, že pro některá přirozená a, b, k platí $[a, b] = k(a + b)$. Označme $d = (a, b)$, pak $a = ud, b = vd$ a $[a, b] = uvd$, kde $(u, v) = 1$. Po dosazení do rovnice dostaneme $uvd = k(ud + vd)$ neboli $uv = k(u + v)$. Z rovnosti $ku = v(u - k)$ plyne $v \mid ku$, tedy $v \mid k$ (neboť $(u, v) = 1$). Podobně se odvodí vztah $u \mid k$. Z $v \mid k$ a $u \mid k$ (opět s ohledem na $(u, v) = 1$) plyne $uv \mid k$, odkud $uv \leq k$, což protirečí rovnosti $uv = k(u + v)$, podle které $uv \geq k(1 + 1) = 2k$.]
- D3. V oboru přirozených čísel řešte rovnici $x^2 + y^2 = 13[x, y]$. [Jedinými dvěma řešeními jsou dvojice 12, 18 a 18, 12. Označme $d = (x, y)$, pak $x = ud, y = vd$ a $[x, y] = uvd$, kde $(u, v) = 1$. Po dosazení do rovnice dostaneme $(u^2 + v^2)d^2 = 13uvd$ neboli $(u^2 + v^2)d = 13uv$. Odtud $u \mid v^2d$ a $v \mid u^2d$, takže s ohledem na $(u, v) = 1$ máme $u \mid d$ a $v \mid d$, tedy rovněž $uv \mid d$. Proto $d = kuv$ pro vhodné celé k . Dosazením do rovnice $(u^2 + v^2)d = 13uv$ dostaneme $(u^2 + v^2)kuv = 13uv$ neboli $(u^2 + v^2)k = 13$. Jediným dělitelem čísla 13 tvaru $u^2 + v^2$ je samo číslo $13 = 2^2 + 3^2$, takže $\{u, v\} = \{2, 3\}$ a $k = 1$, odkud $d = kuv = 6$ a $\{x, y\} = \{ud, vd\} = \{12, 18\}$.]