58. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b, c platí

$$(a + bc)(b + ac) \geqq ab(c + 1)^2.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB. Průsečík úsečky AB s přímkou, která prochází vrcholem C a středem kružnice vepsané trojúhelníku PBC, označíme D. Dokažte, že úsečky AD a AC jsou shodné.

3. Jestliže jistá dvě přirozená čísla ve stejném pořadí sečteme, odečteme, vydělíme a vynásobíme a všechny čtyři výsledky sečteme, dostaneme 2 009. Určete tato dvě čísla.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 22. ledna 2009

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

58. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

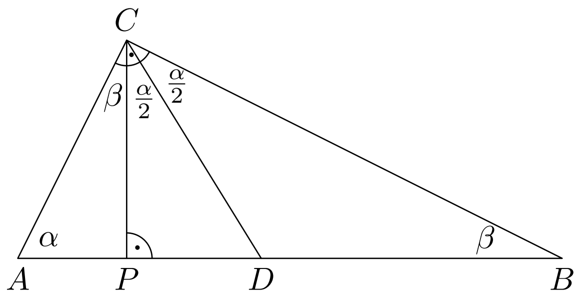
1. Roznásobením a dalšími ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} ab+b^2c+a^2c+abc^2 &\geqq abc^2+2abc+ab,\\ b^2c+a^2c &\geqq 2abc,\\ (a-b)^2c &\geqq 0. \end{aligned}$$

Podle zadání platí $c \geqq 0$ a druhá mocnina reálného čísla $a-b$ je rovněž nezáporná, takže je nezáporná i levá strana upravené nerovnosti. Rovnost v ní (stejně jako v původní nerovnosti) nastane, právě když $a-b=0$ nebo $c=0$, tedy právě když je splněna aspoň jedna z podmínek $a=b$, $c=0$.

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB pro velikosti α, β úhlů při vrcholech A, B platí $\alpha+\beta=90°$, proto je $|\sphericalangle ACP| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DCP| = \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$, neboť přímka CD je osa úhlu BCP (obr. 1). Pro vnější úhel ADC trojúhelníku BCD tak zřejmě platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DCA|$.

Zjistili jsme, že trojúhelník ADC má u vrcholů C, D shodné vnitřní úhly, je tedy rovnoramenný, a proto $|AD| = |AC|$.



Obr. 1

3. Pro hledaná přirozená čísla x a y lze podmínku ze zadání vyjádřit rovnicí

$$(x+y)+(x-y)+\left(\frac{x}{y}\right)+(x\cdot y)=2\,009, \tag{1}$$

ve které jsme dílčí výsledky jednotlivých operací uzávorkovali.

Vyřešme rovnici (1) vzhledem k neznámé x (v níž je, na rozdíl od neznámé y, rovnice *lineární*):

$$\begin{aligned} 2x+\frac{x}{y}+xy &= 2\,009,\\ 2xy+x+xy^2 &= 2\,009y,\\ x(y+1)^2 &= 2\,009y,\\ x &= \frac{2\,009y}{(y+1)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Hledáme právě ta přirozená čísla y, pro která má nalezený zlomek celočíselnou hodnotu, což lze vyjádřit vztahem $(y+1)^2 \mid 2\,009y$. Protože čísla y a $y+1$ jsou nesoudělná, jsou nesoudělná i čísla y a $(y+1)^2$, takže musí platit $(y+1)^2 \mid 2\,009 = 7^2 \cdot 41$. Protože $y+1$ je celé číslo větší než 1 (a činitelé 7, 41 jsou prvočísla), poslední podmínce vyhovuje pouze hodnota $y = 6$, které po dosazení do (2) odpovídá $x = 246$. (Protože rovnice (1) a (2) jsou v oboru přirozených čísel ekvivalentní, není zkouška nezbytná.)

Hledaná čísla v uvažovaném pořadí jsou 246 a 6.

Poznámka. Úvaze o nesoudělnosti čísel y a $y+1$ se lze vyhnout: z rovnice (1) plyne, že podíl x/y je celé číslo. Dosadíme-li do ní $x = ky$, kde k je vhodné přirozené číslo, dostaneme po úpravě $k(y+1)^2 = 2\,009$, odkud podle rozkladu čísla 2 009 na prvočinitele zjistíme, že může být jedině $k = 41$ a $y + 1 = 7$, tedy $y = 6$ a $x = ky = 246$.