58. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Uvažujme výraz

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$

a) Dokažte, že pro každé reálné číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
b) Najděte největší hodnotu $V(x)$.

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a D, E středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům APC, CPB. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku CDE.

3. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ je vybráno několik různých čísel tak, že součet žádných tří z nich není násobkem devíti.

a) Dokažte, že mezi vybranými čísly jsou nejvýše čtyři dělitelná třemi.
b) Ukažte, že vybraných čísel může být 26.

4. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 7. dubna 2009

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Výraz V je zřejmě definován pro všechna reálná čísla x.

a) Protože $x^4+1>0$ pro každé x, je nerovnost $V(x) \geqq 3$ ekvivalentní nerovnosti $5x^4-4x^2+5 \geqq 3(x^4+1)$ neboli $2x^4-4x^2+2 \geqq 0$. Výraz na levé straně je roven $2(x^2-1)^2$, takže je nezáporný pro každé x.

b) Využijme následující úpravu:

$$V(x)=\frac{5x^4-4x^2+5}{x^4+1}=\frac{5(x^4+1)}{x^4+1}-\frac{4x^2}{x^4+1}=5-\frac{4x^2}{x^4+1}.$$

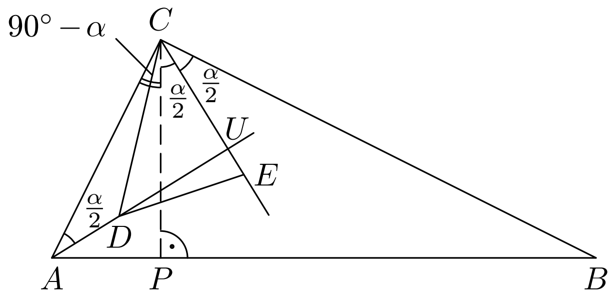
Protože zlomek $\dfrac{4x^2}{x^4+1}$ je díky sudým mocninám proměnné x pro libovolné reálné číslo x nezáporný, nabývá výraz V své největší hodnoty $V_{\max}$, právě když $\dfrac{4x^2}{x^4+1}=0$, tedy právě když $x=0$. Dostáváme tak $V_{\max}=V(0)=5$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za vyřešení části a), 4 body za úplné řešení části b): 3 body za důkaz nerovnosti $V(x) \leqq 5$ a 1 bod za určení rovnosti pro $x=0$. Algebraickou úpravu zlomku pro $V(x)$ částečným vydělením čitatele jmenovatelem bez dalšího úspěšného zhodnocení oceňte 1 bodem.

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme α velikost vnitřního úhlu při vrcholu A, zřejmě pak platí $|\sphericalangle ACP|=90^\circ-\alpha$, $|\sphericalangle PCB|=\alpha$. Střed D kružnice vepsané trojúhelníku APC leží na ose úhlu PAC, takže $|\sphericalangle DAC|=\frac{1}{2}\alpha$, a podobně i $|\sphericalangle PCE|=\frac{1}{2}\alpha$. Odtud pro velikost úhlu AUC v trojúhelníku AUC, kde U je průsečík polopřímek AD a CE (obr. 1), vychází

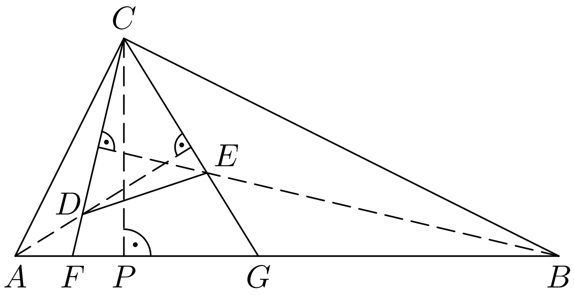
$$|\sphericalangle AUC|=180^\circ-(90^\circ-\alpha+\tfrac{1}{2}\alpha)-\tfrac{1}{2}\alpha=90^\circ.$$

To znamená, že polopřímka AD je kolmá na CE, úsečka DU je tudíž výška v trojúhelníku DEC. Úplně stejně zjistíme, že i polopřímka BE (jinak osa úhlu ABC) je kolmá na CD. Dostáváme tak, že průsečík polopřímek AD a BE, což je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, je zároveň i průsečíkem výšek trojúhelníku DEC.



Obr. 1

Jiné řešení. Označme F a G odpovídající průsečíky přímek CD a CE se stranou AB (obr. 2). Podle tvrzení 2. úlohy školního kola je trojúhelník CAG rovnoramenný se základ-



Obr. 2

nou CG. Osa AD úhlu CAG rovnoramenného trojúhelníku CAG je tudíž i jeho osou souměrnosti a je proto kolmá na základnu CG, tedy i na CE. Podobně zjistíme, že i trojúhelník CBF je rovnoramenný se základnou CF, takže osa BE úhlu FBC je kolmá na CF, tedy i na CD. Průsečík obou os AD a BE je tak nejen středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, ale i průsečíkem výšek trojúhelníku CDE, což jsme měli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V opačném případě oceňte 1 bodem jednotlivé dílčí poznatky vedoucí k řešení (například výpočet jednoho z úhlů ACP či PCE). Za odhalení rovnoramenného trojúhelníku CAG či CBF a odkaz na školní úlohu udělte 3 body stejně jako za jiný důkaz kolmosti AD a CE či BE a CD.

3. Podle zbytků při dělení devíti rozdělíme všech 99 uvažovaných čísel do devíti jedenáctiprvkových tříd $T_0, T_1, \dots, T_8$ (do třídy T_i patří všechna čísla se zbytkem i):

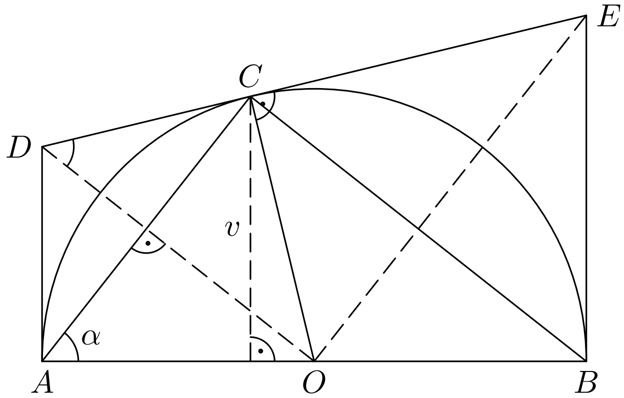
$$\begin{aligned} T_0 &= \{9, 18, 27, \dots, 99\},\\ T_1 &= \{1, 10, 19, \dots, 91\},\\ T_2 &= \{2, 11, 20, \dots, 92\},\\ &\ \vdots\\ T_8 &= \{8, 17, 26, \dots, 98\}. \end{aligned}$$

a) Naším úkolem je dokázat, že v $T_0 \cup T_3 \cup T_6$ leží nejvýše čtyři vybraná čísla. Z každé ze tříd T_0, T_3, T_6 mohou pocházet nejvýše dvě z vybraných čísel (součet libovolných tří čísel z jedné takové třídy už totiž dělitelný devíti je). Protože součet libovolných tří čísel, která po jednom leží ve třídách T_0, T_3 a T_6, je devíti dělitelný, aspoň jedna z těchto tříd žádné vybrané číslo neobsahuje. Z obou vyslovených závěrů plyne dokazované tvrzení: vybraných čísel dělitelných třemi je totiž nejvýše $2 + 2 + 0 = 4$.

b) Ukažme, že vyhovující výběr může obsahovat 26 čísel. Vybereme po dvou číslech z T_0, T_3 a po 11 číslech (tedy všechna čísla) z T_1 a T_2. Dostaneme tak celkem $2 \cdot 2 + 2 \cdot 11 = 26$ čísel; přitom součet libovolných tří z nich dává při dělení devíti zbytek alespoň $0+0+1 = 1$, nejvýše však $2 + 3 + 3 = 8$, takže devíti dělitelný být nemůže.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, a to 3 body a 3 body za část b). Pokud žáci v části b) pouze udají množinu 26 čísel, která splňuje podmínku ze zadání, aniž by tento fakt nějak odůvodnili, udělte za tuto část pouze 1 bod.

4. Označme O střed opsané kružnice, tedy střed přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC, a v velikost jeho výšky na přeponu (obr. 3). Trojúhelník EDO je zřejmě



Obr. 3

rovněž pravoúhlý, protože jeho strany DO a EO jsou kolmé na odvěsny trojúhelníku ABC; přitom jeho výškou na přeponu je úsečka OC (o velikosti $\frac{1}{2}c$). Vzhledem k souměrnosti úsečky AC podle osy OD platí pro jeho úhel při vrcholu D, že $|\sphericalangle CDO| = 90° - |\sphericalangle COD| = 90° - |\sphericalangle AOD| = \alpha$. Trojúhelníky EDO a ABC jsou tudíž podobné (uu). Koeficient k této podobnosti je dán poměrem délek odpovídajících výšek na přepony, takže $k = |OC|/v = \frac{1}{2}c/v$, a protože $vc = 2S$, je

$$k = \frac{c^2}{4S}.$$

V uvedené podobnosti odpovídá přeponě AB přepona DE, proto pro její velikost platí

$$|DE| = kc = \frac{c^3}{4S}.$$

Jiné řešení. Ze souměrnosti tečen z bodu ke kružnici plyne, že oba trojúhelníky ACD i BCE jsou rovnoramenné, $|AD| = |DC|$, $|BE| = |CE|$. Rovnoramenné jsou i trojúhelníky ACO a BCO, kde O je střed přepony AB (ramena obou trojúhelníků mají velikost poloměru kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC, což je $\frac{1}{2}c$). Ukážeme, že jde o dvě dvojice podobných trojúhelníků $ACD \sim BCO$ a $ACO \sim BCE$. K tomu si stačí všimnout, že ve čtyřúhelníku $AOCD$, který je složen ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, platí $|\sphericalangle CDA| = 180° - |\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$. Rovnoramenné trojúhelníky ACD a BCO jsou tedy podobné podle věty uu. Z této podobnosti plyne rovnost $|CD| : |CA| = |CO| : |CB|$, takže při běžném označení odvěsen dostáváme $|CD| = \frac{1}{2}cb/a$, a z podobnosti trojúhelníků ACO a BCE pak $|CE| = \frac{1}{2}ca/b$. Celkem tak je

$$|DE| = |DC| + |CE| = \frac{cb}{2a} + \frac{ca}{2b} = \frac{cb^2 + ca^2}{2ab} = \frac{c(a^2 + b^2)}{2 \cdot 2S} = \frac{c^3}{4S}.$$

Poznámky. Podobnost zmíněných rovnoramenných trojúhelníků můžeme odvodit také tak, že si všimneme rovnosti odpovídajících úhlů ACO a BCE při základnách: oba totiž doplňují úhel OCB do pravého úhlu (ACB, resp. OCE). Proto $ACO \sim BCE$.

Další možnost skýtá objevení rovnosti $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (ramena jednoho úhlu jsou kolmá na ramena druhého). Z pravoúhlého trojúhelníku ODA tak máme $|AO| : |AD| = \operatorname{tg} |\sphericalangle ADO| = \operatorname{tg} \alpha = a : b$, takže $|CD| = |AD| = \frac{1}{2}cb/a$, a analogicky pro pravoúhlý trojúhelník OEB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhalení vhodné rovnosti úhlů udělte 3 body, za výpočet délky úsečky DE další 3 body.