58. ročník matematické olympiády

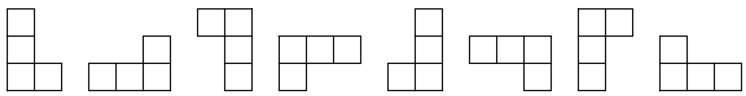
Úlohy krajského kola kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y = 1,$$
$$x - y = a,$$
$$-4ax + 4y = z^2 + 4$$

o neznámých x, y, z a reálném parametru a.

2. Na desce 5×5 hrajeme hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď některého z tvarů



Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí.

a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě.

b) Zdůvodněte, že žádných sedm otázek takovou jistotu nedává.

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, který není rovnoramenný. Označme K průsečík osy úhlu ACB s osou strany AB. Přímka CK protne výšky z vrcholů A a B v bodech, které označíme po řadě P a Q. Předpokládejme, že trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah. Určete velikost úhlu ACB.

4. K libovolnému přirozenému číslu určíme jeho zbytky při dělení každým z deseti přirozených čísel $2, 3, 4, \ldots, 11$ a těchto deset zbytků (některé mohou být nulové) sečteme. Určete všechna taková čísla menší než $25\,000$, která mají uvedený součet co nejmenší. (Nulu za přirozené číslo nepovažujeme.)

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 7. dubna 2009

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

58. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie B

1. Sečtením první a druhé rovnice dané soustavy dostaneme $2x = 1 + a$, odečtením druhé rovnice od první $2y = 1 - a$. Odtud

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \qquad y = \frac{1}{2}(1 - a). \tag{1}$$

Dosadíme-li za x a y do třetí rovnice původní soustavy, dostaneme rovnici

$$-2a(1 + a) + 2(1 - a) = z^2 + 4 \quad \text{neboli} \quad z^2 + 2a^2 + 4a + 2 = 0,$$

kterou upravíme na tvar

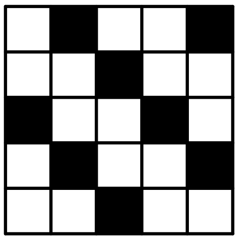
$$z^2 + 2(a + 1)^2 = 0. \tag{2}$$

Oba sčítanci na levé straně poslední rovnice jsou nezáporná čísla. Jejich součet je 0, právě když $z = 0$, $a = -1$. Dosazením těchto hodnot do (1) dostaneme $x = 0$, $y = 1$.

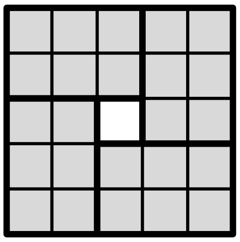
Závěr: Daná soustava rovnic má řešení pouze pro $a = -1$, a to $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. Zkouška při tomto postupu není nutná.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za správné vyjádření x a y pomocí parametru a z prvních dvou rovnic, 3 body za vyřešení rovnice (2), která vznikne dosazením těchto hodnot do třetí rovnice a 1 bod za uvedení správné odpovědi.

2. a) Stačí se otázat například na černá pole v obr. 1: v každém řádku i sloupci jsou vedle sebe nejvýše dvě bílá pole, zatímco každá z lodí zabere v jednom z obou směrů právě tři po sobě stojící pole. Aspoň jedno z nich tedy bude černé.



Obr. 1

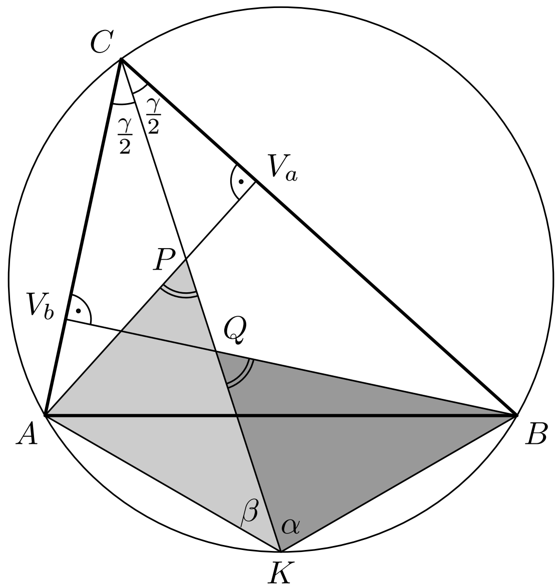


Obr. 2

b) K zásahu lodě na desce o rozměrech 3×2 jsou potřeba alespoň dvě otázky, protože žádné její pole neleží ve všech lodích, které na tuto desku můžeme umístit. Na desce 5×5 můžeme vymezit čtyři nepřekrývající se oblasti 3×2 (obr. 2). I kdyby loď byla umisťována pouze do těchto čtyř oblastí, sedm otázek na její zásah nestačí — podle předchozí úvahy totiž potřebujeme aspoň $4 \times 2 = 8$ otázek.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho za část a) udělte nejvýše 2 body (a to i za pouhý náčrtek bez dalšího zdůvodnění), část b) ohodnoťte nejvýše 4 body.

3. Označme vnitřní úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Ze shodnosti obvodových úhlů ACK a BCK v kružnici opsané trojúhelníku ABC plyne shodnost odpovídajících tětiv AK a BK, takže bod K půlí ten z oblouků AB, který leží proti vrcholu C (obr. 3). Podle věty o obvodových úhlech jsou velikosti úhlů AKC a BKC po řadě rovny



Obr. 3

β a α. Označme V_a, V_b paty výšek příslušných vrcholům A, B trojúhelníku ABC. Protože ABC je ostroúhlý trojúhelník, jsou body V_a a V_b vnitřní body odpovídajících stran. Velikost úhlu APK je shodná s velikostí vnitřního úhlu při vrcholu P v pravoúhlém trojúhelníku CPV_a, je tedy rovna $90° - \frac{1}{2}\gamma$. Stejnou velikost má analogicky i úhel BQK.

Trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah, shodné strany AK a BK, a tudíž i výšky na ně, a navíc se shodují i v úhlu proti nim. Z konstrukce trojúhelníku podle dané strany, výšky na tuto stranu a protilehlého vnitřního úhlu a ze souměrnosti sestrojených řešení plyne, že trojúhelník AKP je shodný buď s trojúhelníkem KBQ, anebo s trojúhelníkem BKQ. Jelikož trojúhelník ABC není rovnoramenný (tj. $\alpha \neq \beta$), je trojúhelník AKP shodný s trojúhelníkem KBQ. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku PAK je $180° - \beta - \left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = 90° - \beta + \frac{1}{2}\gamma$, takže z uvedené shodnosti plyne

$$90° - \beta + \frac{\gamma}{2} = \alpha \qquad \text{neboli} \qquad 90° + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Odtud dostáváme $\gamma = 60°$. Naopak pokud $\gamma = 60°$, je $|\sphericalangle APK| = |\sphericalangle BQK| = 60°$ a trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné podle věty *usu*, mají tedy stejný obsah.

Závěr: Úhel ACB má velikost $60°$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za zjištění, že K je středem oblouku AB (důkaz není nutný, uvede-li student, že jde o známou skutečnost). Dále 1 bodem oceňte vyjádření velikostí vnitřních úhlů v trojúhelnících AKP a BKQ pomocí α, β, γ. Další 2 body udělte za důkaz shodnosti trojúhelníků AKP a BKQ, 1 bod za výpočet úhlu γ a 1 bod za důkaz, že z podmínky $\gamma = 60°$ plyne shodnost (obsahů) trojúhelníků AKP a KBQ.

4. Uvažujme přirozené číslo $n < 25\,000$ a označme $r_2, r_3, \ldots, r_{11}$ odpovídající mu zbytky po dělení čísly $2, 3, \ldots, 11$. Jako součet nezáporných zbytků je příslušný součet $z = r_2 + r_3 + \ldots + r_{11}$ rovněž nezáporný. V daném případě však nemůže být roven 0, protože to by znamenalo, že číslo n je dělitelné každým z prvků množiny $\mathsf{M} = \{2, 3, 4, \ldots, 11\}$, jejichž nejmenší společný násobek je $27\,720 > 25\,000$.

Ukážeme, že nejmenší možný součet je 1, a zároveň najdeme i všechna čísla n menší než 25 000 s touto vlastností.

Je-li příslušný součet roven 1, jsou všechny zbytky r_k s výjimkou jednoho rovny 0, a existuje tedy právě jedno $d \in \mathsf{M}$ tak, že $r_d = 1$. Ukážeme, že $d = 7$ nebo $d = 11$. Nemůže zřejmě být $d \leqq 5$, to by totiž nenulový zbytek odpovídal i číslu $2d \in \mathsf{M}$. Kdyby zbytek 1 odpovídal jednomu z čísel $d = 6, 8, 9, 10$, odpovídal by nutně i jednomu z čísel 2 nebo 3.

Pokud $d = 7$, musí být hledané číslo násobkem všech čísel z $\mathsf{M} \setminus \{7\}$, tedy násobkem čísla 3 960. Toto číslo dává při dělení 7 zbytek 5, zbytek 1 dává jeho trojnásobek $n = 3 \cdot 3\,960 = 11\,880$, který vyhovuje podmínkám úlohy, a obecně každý $(3 + 7a)$-násobek; ovšem další násobek $10 \cdot 3\,960$ s vyhovujícím zbytkem je už větší než 25 000.

Pokud $d = 11$, musí být hledané číslo násobkem všech čísel z $\mathsf{M} \setminus \{11\}$, tedy násobkem čísla 2 520. Protože toto číslo dává při dělení 11 zbytek 1, vyhovuje pro $d = 11$ jedině ono (další násobek $(1 + 11) \cdot 2\,520$ s vyhovujícím zbytkem je totiž už větší než 25 000).

Závěr: Hledaná čísla jsou dvě, a to 11 880 a 2 520.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, za důkaz, že součet zbytků je alespoň jedna, udělte 1 bod, za důkaz, že hledané číslo je dělitelné všemi čísly z M kromě 7 nebo 11, pro která dává zbytek 1, udělte 3 body, za nalezení odpovídajících čísel 11 880 a 2 520 udělte po 1 bodu. Pokud řešitel ukáže, že součet zbytků je nejvýše 1, a uvedením jednoho z vyhovujících čísel ukáže, že nejmenší součet zbytků je skutečně 1, ohodnoťte jeho řešení 3 body (neboť úkolem bylo najít *všechna* vyhovující čísla).