Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli.*

Řešení. Označme n trojmístné číslo určené prvním trojčíslím (zleva) hledaného čtyřmístného čísla, které se pak rovná $10n + 8$. Podle zadání úlohy platí

$$8 \mid 10n + 8, \tag{1}$$
$$9 \mid 10n + 7, \tag{2}$$
$$7 \mid 10n + 9. \tag{3}$$

Ze vztahu (1) plyne $8 \mid 10n$ neboli $4 \mid 5n$. Čísla 4 a 5 jsou nesoudělná, proto $4 \mid n$ neboli $n = 4k$, kde k je přirozené číslo. Dosazením $n = 4k$ do vztahu (2) dostaneme $9 \mid 40k + 7$ neboli $9 \mid 4k + 7$. Z tabulky zbytků čísel $4k + 7$ při dělení devíti

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4k + 7$	7	2	6	1	5	0	4	8	3

vidíme, že toto číslo je dělitelné devíti, právě když číslo k při dělení devíti dává zbytek 5. Proto $k = 9l + 5$, kde l je celé číslo, takže $n = 4k = 36l + 20$. Dosazením takového n do vztahu (3) dostaneme $7 \mid 360l + 209$ neboli $7 \mid 3l - 1$. Opět sestavíme tabulku zbytků, tentokrát při dělení čísla $3l - 1$ sedmi:

l	0	1	2	3	4	5	6
$3l - 1$	6	2	5	1	4	0	3

Vidíme, že $7 \mid 3l - 1$, právě když $l = 7m + 5$, kde m je celé číslo. Odtud dostáváme, že všechna celočíselná n splňující trojici podmínek (1)–(3) jsou tvaru $n = 36l + 20 = 252m + 200$.

Dodejme, že namísto sestavování tabulek jsme mohli využít úprav

$$40k + 7 = 36k + 4(k - 5) + 27,$$
$$360l + 209 = 357l + 3(l - 5) + 224,$$

z nichž bychom jako dříve dostali $9 \mid k - 5$ a $7 \mid l - 5$.

Číslo $n = 252m + 200$ je trojmístné jedině pro $m \in \{0, 1, 2, 3\}$; hledané n je proto z množiny $\{200, 452, 704, 956\}$ a na tabuli bylo napsáno jedno z čísel 2 008, 4 528, 7 048, 9 568. Zkouškou (která ovšem při našem postupu není nutná) můžeme ověřit, že každé z těchto čtyř čísel vyhovuje zadání úlohy.

Jiné řešení. Při druhém postupu budeme úvahy o dělitelnosti výhodně zapisovat kongruencemi.[1] Zápis $a \equiv b \pmod{m}$ (čteme „a je kongruentní s b podle modulu m“) znamená, že čísla a, b dávají při dělení číslem m stejné zbytky neboli $m \mid a - b$.

Označme N hledané čtyřmístné číslo končící číslicí 8. Protože při její záměně číslicí 7, resp. 9 dostaneme číslo $N-1$, resp. $N+1$, všechny podmínky ze zadání úlohy lze vyjádřit čtyřmi kongruencemi

$$N \equiv 8 \pmod{10}, \tag{4}$$
$$N \equiv 0 \pmod{8}, \tag{5}$$
$$N - 1 \equiv 0 \pmod{9}, \tag{6}$$
$$N + 1 \equiv 0 \pmod{7}. \tag{7}$$

Ze vztahu (5) plyne $N = 8k$, kde k je celé číslo. Dosazením do vztahu (4) dostaneme $8k \equiv 8 \pmod{10}$ neboli $4k \equiv 4 \pmod{5}$, což po dělení číslem 4 (nesoudělným s číslem 5) vede k podmínce $k \equiv 1 \pmod{5}$. Proto $k = 5l + 1$, kde l je celé číslo. Dosazením $N = 8k = 40l + 8$ do vztahu (6) obdržíme podmínku $40l + 7 \equiv 0 \pmod{9}$. Její úpravou dostaneme

$$40l \equiv -7 \equiv -7 + 9 \cdot 23 = 200 \pmod{9}$$

a po vydělení číslem 40 (nesoudělným s číslem 9) dojdeme k podmínce $l \equiv 5 \pmod{9}$. Existuje tedy celé číslo m tak, že $l = 9m + 5$. Dosazením $N = 40l + 8 = 360m + 208$ do vztahu (7) dostaneme $360m + 209 \equiv 0 \pmod{7}$ neboli $3m \equiv 1 \pmod{7}$. Úpravou

$$3m \equiv 1 \equiv 1 + 2 \cdot 7 = 15 \pmod{7}$$

po vydělení číslem 3 vyjde $m \equiv 5 \pmod{7}$, takže $m = 7n + 5$, kde n je celé číslo. Hledané N je proto tvaru $N = 360m + 208 = 2\,520n + 2\,008$. Takové N je čtyřmístné, právě když $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Na tabuli proto mohlo být napsáno kterékoliv číslo z množiny $\{2\,008, 4\,528, 7\,048, 9\,568\}$ a žádné jiné.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte nejmenší přirozené číslo n s vlastností a) $5 \mid n+1$, $6 \mid n$, $7 \mid n-1$; b) $4 \mid n-2$, $5 \mid n-3$, $6 \mid n-4$. [a) 204, b) 58]
2. Určete všechna přirozená čísla n, která se nedají zapsat ve tvaru $n = 3x + 5y$, kde x, y jsou přirozená čísla. [35–C–I–2]
3. Pro libovolné trojmístné číslo určíme zbytky při dělení čísly 2, 3, 4, …, 10 a získaných devět čísel sečteme. Určete nejmenší možnou hodnotu takového součtu. [47–C–I–1]

2. *Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí*

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

Řešení. Odečtením první rovnice od druhé dostaneme po úpravě

$$(z - x)(2z + 2x + y) = 0.$$

Jsou proto možné dva případy, které rozebereme samostatně.

[1] S tímto způsobem počítání se zbytkovými třídami se lze seznámit v brožuře A. Apfelbecka: *Kongruence*, Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1968.

a) *Případ* $z - x = 0$. Dosazením $z = x$ do první rovnice soustavy dostaneme $x^2 + xy = y^2 + x^2$ neboli $y(x-y) = 0$. To znamená, že platí $y = 0$ nebo $x = y$. V prvním případě dostáváme trojice $(x, y, z) = (x, 0, x)$, ve druhém $(x, y, z) = (x, x, x)$; takové trojice jsou řešeními dané soustavy pro libovolné reálné číslo x, jak snadno ověříme dosazením (i když taková zkouška při našem postupu vlastně není nezbytná).

b) *Případ* $2z + 2x + y = 0$. Dosazením $y = -2x - 2z$ do první rovnice soustavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x - 2z) = (-2x - 2z)^2 + z^2 \quad \text{neboli} \quad 5(x + z)^2 = 0.$$

Poslední rovnice je splněna, právě když $z = -x$, tehdy ovšem $y = -2x - 2z = 0$. Dostáváme trojice $(x, y, z) = (x, 0, -x)$, které jsou řešeními dané soustavy pro každé reálné x, jak ověříme dosazením. (O takové zkoušce platí totéž co v případě a).)

Odpověď. Všechna řešení (x, y, z) dané soustavy jsou trojice tří typů:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde x je libovolné reálné číslo.

Jiné řešení. Obě rovnice soustavy sečteme. Po úpravě dostaneme rovnici

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opět rozlišíme dvě možnosti.

a) *Případ* $y = 0$. Z první rovnice soustavy ihned vidíme, že $x^2 = z^2$, neboli $z = \pm x$. Zkouškou ověříme, že každá z trojic $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pro libovolné reálné x řešením.

b) *Případ* $x + z - 2y = 0$. Dosazením $y = \frac{1}{2}(x + z)$ do první rovnice soustavy dostaneme

$$x^2 + \frac{x(x+z)}{2} = \frac{(x+z)^2}{4} + z^2, \quad \text{po úpravě} \quad x^2 = z^2.$$

Platí tedy $z = -x$ nebo $z = x$. Dosazením do rovnosti $x + z - 2y = 0$ v prvním případě dostaneme $y = 0$, ve druhém případě $y = x$. Odpovídající trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) jsou řešeními pro každé reálné x (první z nich jsme ovšem našli již v části a)).

Návodné a doplňující úlohy:

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

[Odečtením rovnic dostaneme po úpravě $(x - y)(x + y + 2) = 0$. Je-li $x = y$, potom $x = y = 1$. Pro $x + y = -2$ soustava nemá řešení.]

2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - y = z^2,$$
$$y^2 - z = x^2,$$
$$z^2 - x = y^2.$$

[57–A–S–1]

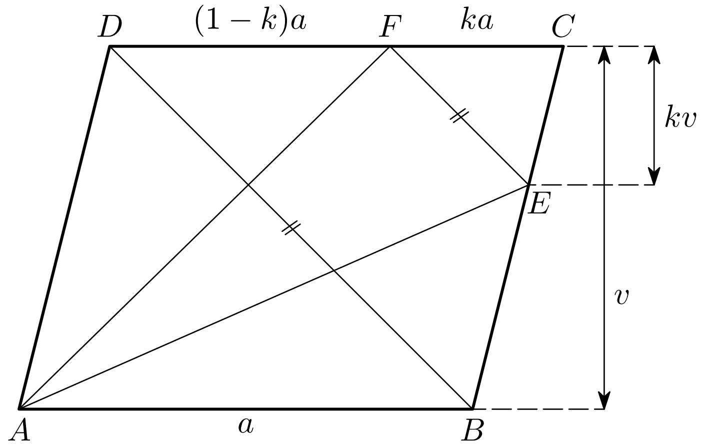
3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y + z = 2,$$
$$x + y^2 + z = 2,$$
$$x + y + z^2 = 2.$$

[Rozdíl dvou prvních rovnic soustavy lze upravit do tvaru $(x-y)(x+y-1) = 0$. Řešeními jsou libovolné permutace trojic $(1, 1, 0)$, $(2, -1, -1)$ a rovněž dvě trojice (a, a, a) pro $a = -1 \pm \sqrt{3}$.]

3. *Na straně BC, resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE, AEF a AFD měly stejné obsahy.*

Řešení. Označme a velikost stran AB a CD a v vzdálenost jejich přímek, která je zároveň rovna výšce trojúhelníku AFD z vrcholu A (obr. 1). Z podmínky $EF \parallel BD$ podle věty uu vyplývá, že trojúhelníky BCD a ECF jsou podobné; označme $k \in (0,1)$ koeficient jejich podobnosti. Jakmile ho vypočteme, bude úloha vyřešena.



Obr. 1

Protože $|FC| = ka$, $|FD| = (1-k)a$ a výšky trojúhelníků ECF, ABE ze společného vrcholu E mají velikosti kv, resp. $(1-k)v$, pro obsahy trojúhelníků AFD a ABE platí

$$S_{AFD} = \frac{(1-k)av}{2} = \frac{a(1-k)v}{2} = S_{ABE},$$

takže oba obsahy se rovnají pro libovolné $k \in (0,1)$. Protože obsah trojúhelníku ECF má hodnotu $S_{ECF} = \frac{1}{2}ka \cdot kv = \frac{1}{2}k^2av$ a obsah celého rovnoběžníku $ABCD$ je dán vzorcem $S_{ABCD} = av$, můžeme obsah trojúhelníku AEF vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ECF} - S_{AFD} = \\ &= av\left(1 - \tfrac{1}{2}(1-k) - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{2}(1-k)\right) = av\left(k - \tfrac{1}{2}k^2\right). \end{aligned}$$

Obsahy trojúhelníků ABE, AFD proto budou shodné s obsahem trojúhelníku AEF, právě když bude platit

$$\tfrac{1}{2}(1-k) = k - \tfrac{1}{2}k^2 \quad \text{neboli} \quad k^2 - 3k + 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má kořeny

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

z nichž podmínce $k \in (0,1)$ vyhovuje pouze kořen $k = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$. Dodejme, že pro takové k platí

$$1 - k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{k}{1-k}.$$

Odpověď. Hledané body E, F jsou určeny poměry

$$|CE| : |EB| = |CF| : |FD| = \left(\sqrt{5} - 1\right) : 2.$$

Poznámka. Rovnost $(1 - k) : 1 = k : (1 - k)$ ze závěru řešení znamená, že body E, F dělí příslušné strany rovnoběžníku v tzv. *zlatém poměru.* Vyjadřují to rovnosti

$$|CE| : |EB| = |EB| : |BC| \quad \text{a} \quad |CF| : |FD| = |FD| : |DC|.$$

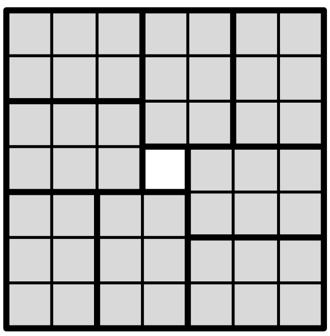
Návodné a doplňující úlohy:

1. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [55–C–II–1]
2. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s jednotkovým obsahem, pro který platí $|AB| = 2|CD|$. Označme K, L po řadě středy stran BC a CD. Najděte obsah trojúhelníku AKL. [Obsahy trojúhelníků ABK, CLK a ADL jsou po řadě $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$ a $\frac{1}{6}$, tedy obsah trojúhelníku AKL je $\frac{5}{12}$.]
3. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem D protíná úsečku AC v bodě G, úsečku BC v bodě F a polopřímku AB v bodě E tak, že trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah. Určete poměr $|AG| : |CG|$. [54–B–I–2]

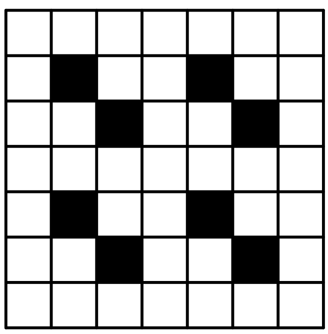
4. *Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.*

Řešení. Podle obr. 2 můžeme na desku umístit 8 disjunktních obdélníků 2×3 (střední políčko desky zůstane prázdné). Abychom jistě zasáhli loď, musíme se zeptat na alespoň jedno políčko v každém z osmi vyznačených obdélníků, proto je nutný počet otázek alespoň 8.

Na obr. 3 je uveden příklad výběru osmi polí, na která se stačí ptát, aby se už mimo ně nedala na desku umístit žádná loď 2×3. Proto těchto 8 otázek k zasažení lodě vždy stačí.



Obr. 2



Obr. 3

Z obou uvedených úvah plyne následující závěr.

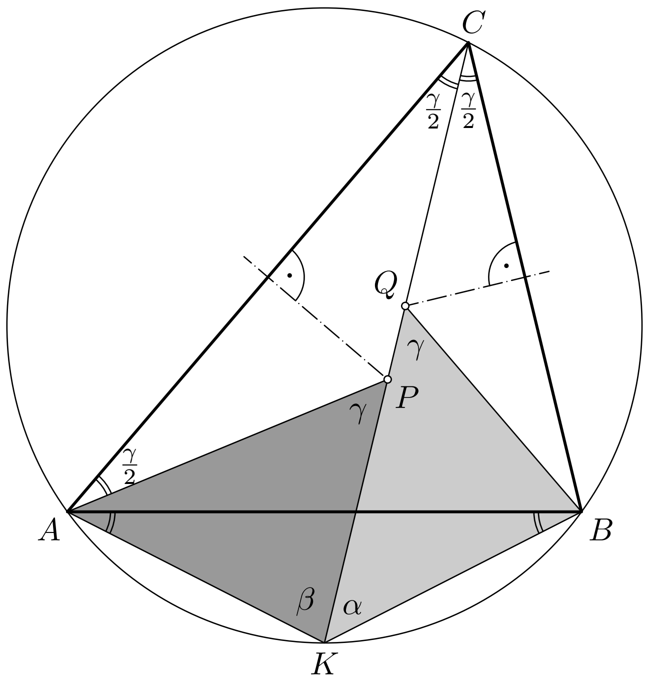
Odpověď. Nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli, je právě 8.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Na desce $n \times n$ hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli. Úlohu řešte pro $n = 3, 4, 5$. [1, 2, 4]
2. Předchozí úlohu řešte pro jednu loď 2×2 na desce 8×8 a na desce 7×7. [16, 12]
3. Určete nejmenší přirozené číslo k s vlastností: když vybereme k různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 1999\}$, potom mezi nimi existují dvě, jejichž součet je 2000. [49–C–S–1]
4. Určete nejmenší přirozené číslo k s vlastností: když vybereme k různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 2000\}$, potom mezi nimi existují dvě, jejichž součet nebo rozdíl je 667. [49–A–S–3]
5. Zjistěte nejmenší přirozená čísla k, pro něž platí jednotlivá tvrzení a), b) a c): Obsadíme-li figurkami libovolných k polí šachovnice 8×8, pak budou obsazena některá
   a) tři sousední pole některého řádku,
   b) tři sousední pole některé šikmé řady,
   c) čtyři sousední pole některého řádku nebo sloupce.
   Šikmou řadou rozumíme takovou skupinu polí, jejichž úhlopříčky jednoho z obou směrů leží na jedné a téže přímce. [49–C–I–3]
6. Dokažte, že na šachovnici 8×8 nelze rozmístit 7 střelců tak, aby všechna pole šachovnice byla ohrožena. Dále ukažte, že lze na šachovnici rozmístit 8 střelců tak, aby každé neobsazené pole šachovnice bylo ohroženo některým ze střelců. [37–B–II–2, 37–B–S–1]
7. Jaký největší počet králů lze umístit na šachovnici 8×8, aby se žádní dva navzájem nehrožovali? [16. Šachovnici rozdělte na 16 částí 2×2, v každé z nich může být nejvýše jeden král.]

5. *Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa strany AB protne kružnici k v bodě K, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Osy stran AC a BC protnou přímku CK po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné.*

Řešení. Označme α, β, γ obvyklým způsobem velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (obr. 4). Bod K leží na ose úsečky AB, proto $|AK| = |KB|$. Trojúhelník AKB je rovnoramenný se základnou AB, jeho vnitřní úhly při vrcholech A a B jsou tudíž



Obr. 4

shodné. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné i úhly BCK a BAK, resp. ACK a ABK, jsou proto shodné i úhly BCK a ACK. Polopřímka CK je tudíž osou úhlu ACB:

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Protože bod P leží na ose strany AC, je trojúhelník ACP rovnoramenný a jeho vnitřní úhly při základně AC mají velikost $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vnější úhel APK při vrcholu P má velikost $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Stejně tak z rovnoramenného trojúhelníku BCQ usoudíme, že i velikost úhlu BQK je γ. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné úhly ABC a AKC, tedy úhel AKC (neboli úhel AKP) má velikost β a — zcela analogicky — úhel BKQ má velikost α.

V každém z trojúhelníků AKP a BKQ již známe velikosti dvou vnitřních úhlů (β, γ, resp. α, γ), takže vidíme, že zbývající úhly KAP a KBQ mají velikosti α, resp. β.

Z předchozího plyne, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné podle věty *usu*, neboť mají shodné strany AK a KB i obě dvojice k nim přilehlých vnitřních úhlů.

K uvedenému postupu dodejme, že výpočet úhlů KAP a KBQ přes úhly APK a BQK lze obejít takto: shodnost úhlů KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) plyne ze shodnosti úhlů KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K, L paty výšek z vrcholů A, B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC. [54–B–II–3]
2. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]
3. Označme S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku ABS leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [Pro bod K z řešení soutěžní úlohy platí $|KA| = |KB| = |KS|$, neboť $S \in KC$ a $|\sphericalangle KAS| = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, takže i $|\sphericalangle KSA| = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$.]

6. *Najděte všechny dvojice celých čísel* (m, n)*, pro něž je hodnota výrazu*

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo.

ŘEŠENÍ. Nejprve si všimneme, že jmenovatel zlomku lze postupným vytýkáním rozložit na součin $(m + 2)(n - 1)$. Proto bude výhodné položit $a = m + 2$, $b = n - 1$ a pro nová neznámá (nenulová!) celá čísla a, b zkoumat, kdy je hodnota daného výrazu

$$V = \frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2} = \frac{(a - 2) + 3(b + 1) - 1}{ab} = \frac{a + 3b}{ab}$$

(jak vyžaduje zadání) *celé kladné* číslo (používejme dále obvyklý termín *přirozené číslo*). Uveďme dva možné přístupy k řešení takové otázky.

Při prvním způsobu využijeme rozkladu

$$V = \frac{a + 3b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{3}{a}$$

a zřejmých odhadů
$$0 < \left|\frac{1}{b}\right| \leqq 1, \qquad 0 < \left|\frac{3}{a}\right| \leqq 3.$$

Kdyby platilo $a < 0$, bylo by $\frac{3}{a} < 0$, a tudíž $V < \frac{1}{b} \leqq 1$, tedy V by nebylo přirozené číslo. Proto nutně platí $a > 0$.

Pro $a > 6$ je $\frac{3}{a} < \frac{1}{2}$, a tedy $V < \frac{1}{b} + \frac{1}{2}$, takže nerovnost $V \geqq 1$ platí, jedině když $\frac{1}{b} > \frac{1}{2}$, což splňuje jediné celé b, totiž $b = 1$, pro které pak ovšem je $1 < V < \frac{3}{2}$. Proto musí platit $1 \leqq a \leqq 6$. Těchto šest možností jednotlivě rozebereme:

- ▷ $a = 1$. Číslo $V = 3 + \frac{1}{b}$ je celé jedině pro $b = \pm 1$, kdy je i kladné. V původních neznámých dostáváme dvě řešení $(m, n) = (-1, 2)$ a $(m, n) = (-1, 0)$.
- ▷ $a = 2$. Číslo $V = \frac{3}{2} + \frac{1}{b}$ je přirozené, právě když $b = \pm 2$; odpovídající řešení jsou $(m, n) = (0, 3)$ a $(m, n) = (0, -1)$.
- ▷ $a = 3$. Číslo $V = 1 + \frac{1}{b}$ je přirozené, právě když $b = 1$, tehdy $(m, n) = (1, 2)$.
- ▷ $a = 4$. Číslo $V = \frac{3}{4} + \frac{1}{b}$ je přirozené, právě když $b = 4$, tehdy $(m, n) = (2, 5)$.
- ▷ $a = 5$. Číslo $V = \frac{3}{5} + \frac{1}{b}$ zřejmě není celé pro žádné celé b.
- ▷ $a = 6$. Číslo $V = \frac{1}{2} + \frac{1}{b}$ je přirozené, právě když $b = 2$, tehdy $(m, n) = (4, 3)$.

Odpověď. Existuje právě 7 dvojic celých čísel (m, n), pro které je hodnota daného výrazu V celým kladným číslem, jsou to dvojice
$$(m, n) \in \{(-1, 2), (-1, 0), (0, 3), (0, -1), (1, 2), (2, 5), (4, 3)\}.$$

Jiné řešení. Hledáme nenulová celá a, b, pro něž $a + 3b = kab$ pro vhodné přirozené k. Označme $d \geqq 1$ největší společný dělitel takových čísel a, b. Pak $a = xd$ a $b = yd$ pro celá nesoudělná čísla x, y, jež splňují rovnici $(x+3y)d = kxyd^2$ neboli $x+3y = kxyd$. Odtud plyne, že číslo y dělí nesoudělné číslo x. To je možné, jedině když $y = \pm 1$.

V případě $y = 1$ máme rovnici $x + 3 = kxd$ neboli $3 = x(kd - 1)$. Protože platí $kd \geqq 1$ (čísla k, d jsou přirozená), je buď $x = 1$ a $kd - 1 = 3$ (pak $kd = 4$, a tedy $d \in \{1, 2, 4\}$, takže $(a, b) = (d, d)$ je jedna z dvojic $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$), nebo je $x = 3$ a $kd - 1 = 1$ (pak $kd = 2$, a tedy $d \in \{1, 2\}$, takže $(a, b) = (3d, d)$ je jedna z dvojic $(3, 1)$, $(6, 2)$).

V případě $y = -1$ máme rovnici $x - 3 = -kxd$ neboli $3 = x(1 + kd)$, což vzhledem k nerovnosti $1 + kd \geqq 2$ znamená, že $x = 1$ a $1 + kd = 3$, takže je $kd = 2$, a tedy $d \in \{1, 2\}$, proto $(a, b) = (d, -d)$ je jedna z dvojic $(1, -1)$, $(2, -2)$.

Zjistili jsme, že existuje sedm vyhovujících dvojic (a, b), vypsat odpovídající řešení $(m, n) = (a - 2, b + 1)$ je už nasnadě (viz odpověď výše).

Návodné a doplňující úlohy:

1. Najděte všechna řešení rovnice $xyz = 3(x+y+z)$ v oboru celých kladných čísel. Řešení, která se liší jen pořadím, nepovažujeme za různá. [36–B–II–3b]
2. a) Nechť a, b jsou nesoudělná přirozená čísla. Pak přirozená čísla x, y, z, kde $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$, jsou nesoudělná a platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Dokažte.

   b) Nechť naopak x, y, z jsou nesoudělná přirozená čísla, pro něž platí $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Ukažte, že pak existují přirozená čísla a, b taková, že $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$. [33–C–I–5]