58. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. Zjistěte, pro které dvojice kladných celých čísel m a n platí

$$\sqrt{m^2-4} < 2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2-2}.$$

2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost 45°. Označme D patu výšky z vrcholu C. Uvažujme dále libovolný vnitřní bod P výšky CD. Dokažte tvrzení: Přímky AP a BC jsou navzájem kolmé, právě když úsečky AP a BC jsou shodné.

3. Určete všechna celá čísla větší než 1, kterými lze krátit některý ze zlomků tvaru

$$\frac{3p-q}{5p+2q},$$

kde p a q jsou nesoudělná celá čísla.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 2. prosince 2008

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Splňují-li přirozená čísla m, n zadané nerovnosti, musí zřejmě platit

$$m \geqq 2 \quad \text{a} \quad 2\sqrt{n} - m > 0, \tag{1}$$

jinak by zastoupené odmocniny nebyly definovány, resp. prostřední výraz $2\sqrt{n} - m$ by byl nekladný, a tak by nemohl být větší než nezáporný výraz $\sqrt{m^2 - 4}$.

Předpokládejme, že podmínky (1) jsou splněny a každou ze zadaných nerovností v jednom sloupci *ekvivalentně* upravme (při každém ze čtyř umocňování jsou obě strany definovány a mají nezáporné hodnoty, stejně tak obě dělení *kladným* číslem n jsou v pořádku):

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n} - m &< \sqrt{m^2 - 2} && \Big|^2 \qquad & \sqrt{m^2 - 4} &< 2\sqrt{n} - m && \Big|^2 \\
4n - 4m\sqrt{n} + m^2 &< m^2 - 2 && & m^2 - 4 &< 4n - 4m\sqrt{n} + m^2 && \\
n + \tfrac{1}{2} &< m\sqrt{n} && \Big|^2 & m\sqrt{n} &< n + 1 && \Big|^2 \\
n^2 + n + \tfrac{1}{4} &< m^2 n && \Big| : n & m^2 n &< n^2 + 2n + 1 && \Big| : n \\
n + 1 + \frac{1}{4n} &< m^2 && & m^2 &< n + 2 + \frac{1}{n} &&
\end{aligned}$$

Poslední dvě nerovnosti platí, právě když číslo m^2 leží v otevřeném intervalu

$$\left(n + 1 + \frac{1}{4n}, n + 2 + \frac{1}{n}\right).$$

Ten s ohledem na zřejmé nerovnosti $0 < \frac{1}{4n} \leqq \frac{1}{4}$ a $0 < \frac{1}{n} \leqq 1$ obsahuje jediné celé číslo $n + 2$. Za předpokladu (1) proto přirozená čísla m, n splňují původní nerovnosti, právě když platí $m^2 = n + 2$.

Zbývá zjistit, která přirozená čísla m, n vázaná vztahy $n = m^2 - 2$ splňují za předpokladu $m \geqq 2$ i druhou z podmínek (1). Proveďme její ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{m^2 - 2} - m &> 0, \\
2\sqrt{m^2 - 2} &> m, \qquad \Big|^2 \\
4(m^2 - 2) &> m^2, \\
3m^2 &> 8.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost je ovšem pro každé $m \geqq 2$ už splněna.

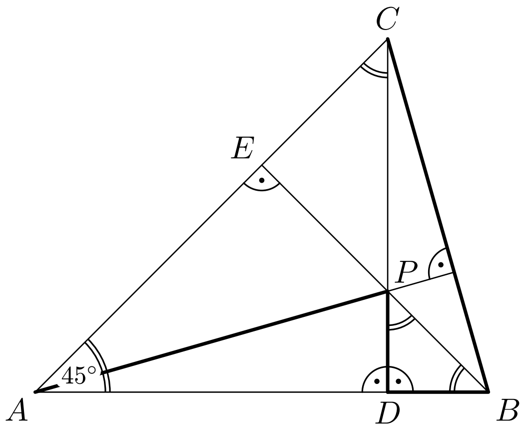
Odpověď. Hledané dvojice jsou právě dvojice tvaru $(m, n) = (m, m^2 - 2)$, kde $m \geqq 2$ je libovolné přirozené číslo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za nalezení intervalu pro hodnotu m^2 (či v jiné formě vyřešenou soustavu zadaných nerovnic s neznámou m a parametrem n) správnými důsledkovými úpravami udělte 2 body, další 2 body pak dejte za úvahu o celočíselnosti vedoucí ke vztahu $n = m^2 - 2$; zbylé 2 body náleží za zkoušku, při které je pro nalezené dvojice nutno zdůvodnit platnost *původních* nerovností, a to vysvětlením, proč jsou provedené úpravy umocněním korektní. Není-li při zkoušce vyloučena hodnota $m = 1$, strhněte 1 bod.

Stanoví-li řešitel obecné podmínky, za nichž jsou všechny prováděné úpravy daných nerovností ekvivalentní, pak udělte 5 bodů za odvození vztahu $n = m^2 - 2$ a 1 bod za následné ověření, že pro každé $m \geqq 2$ dvojice $(m, n) = (m, m^2 - 2)$ stanovené podmínky splňuje.

2. Nejdřív dokážeme první implikaci. Nechť $AP \perp BC$, bod P je pak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Chceme dokázat, že úsečky AP a BC jsou shodné, najdeme proto dva shodné trojúhelníky, v nichž si tyto úsečky jako strany odpovídají.

Označme E průsečík přímky BP se stranou AC, tj. patu výšky z vrcholu B. Z pravoúhlého trojúhelníku ABE a dané velikosti úhlu BAC snadno dopočítáme, že $|\sphericalangle PBD| = 45°$. Trojúhelník PDB je tedy pravoúhlý a rovnoramenný, takže $|DP| = |DB|$ (obr.). Podobně trojúhelník ADC je pravoúhlý a vzhledem k velikosti úhlu při vrcholu A i rovnoramenný, proto $|DA| = |DC|$. Podle věty *sus* jsou pak pravoúhlé trojúhelníky APD a CBD shodné a jejich přepony AP, BC proto mají stejnou délku.



Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme, že $|AP| = |BC|$. Protože ADC je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, platí $|AD| = |CD|$, takže trojúhelníky PAD a BCD jsou shodné podle věty *Ssu*. Máme tak $|PD| = |BD|$, proto $|\sphericalangle ABP| = 45°$. Označme opět E průsečík přímky BP se stranou AC. V trojúhelníku ABE vychází, že úhel BEA je pravý, takže přímka BP je výškou trojúhelníku ABC (obr.) a bod P je tak jeho průsečík výšek. Odtud plyne, že AP je výška na stranu BC, tudíž je na ni kolmá.

Jiné řešení. Je-li $AP \perp BC$, je bod P průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC| = 45°$. Podobně jako v jednom z řešení druhé úlohy domácího kola[1] můžeme odvodit, že

$$|AP| = \frac{|BC| \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = |BC| \cdot \operatorname{cotg}\alpha = |BC| \cdot \operatorname{cotg} 45° = |BC|.$$

Nechť naopak $|AP| = |BC|$. Označme Q průsečík výšek trojúhelníku ABC. Z právě dokázané implikace víme, že $|AQ| = |BC|$. Všechny body výšky CD mají ovšem navzájem různou vzdálenost od vrcholu A, proto může uvnitř úsečky CD ležet nejvýše jeden bod P s vlastností $|AP| = |BC|$, a tento bod musí být totožný s bodem Q. Je tedy $AP \perp BC$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Přitom za úplný důkaz každé z obou implikací udělte 3 body. Za důkaz první implikace využívající *bez důkazu* vztah $|AP| = |BC| \operatorname{cotg}\alpha$ odvozený v domácím kole udělte 3 body, pokud žák uvede, že používá vztah z řešení domácího kola, jinak dejte jen 1 bod.

---

[1] V uvedeném řešení byla při standardním označení odvozena rovnost $|CU| = c|\cos\gamma|/\sin\gamma$, kde U je průsečík výšek trojúhelníku ABC.

V případě neúplného důkazu některé z implikací udělte body odpovídající tomu, jak daleko se žák dostal; například za odvození rovnosti $|DP| = |DB|$ v případě první implikace 1 bod, za odvození rovnosti $|AD| = |CD|$ též 1 bod.

Za odůvodněné pozorování, že trojúhelník ADC je rovnoramenný, udělte 1 bod i v případě, že žák toto pozorování nepoužije k úspěšnému důkazu ani jedné z implikací.

3. Zlomek lze krátit celým číslem $d > 1$, právě když je číslo d společným dělitelem čitatele i jmenovatele uvažovaného zlomku. Předpokládejme tedy, že platí $d \mid 3p-q$ a zároveň $d \mid 5p+2q$, kde p a q jsou nesoudělná celá čísla. Sčítáním vhodných násobků dvojčlenů $3p-q$ a $5p+2q$ dostaneme

$$2(3p-q)+(5p+2q)=11p \quad \text{a} \quad 3(5p+2q)-5(3p-q)=11q.$$

Protože obě čísla $3p-q$ a $5p+2q$ jsou dle předpokladu násobky čísla d, jsou jeho násobky i sestavená čísla $11p$ a $11q$. Jinak řečeno, číslo d je společným dělitelem čísel $11p$ a $11q$. Čísla p a q jsou však nesoudělná a číslo 11 je prvočíslo, takže čísla $11p$ a $11q$ mají jediného společného dělitele většího než 1, a tím je číslo 11. Musí tedy platit $d = 11$.

Řešení ještě není u konce: musíme ukázat, že číslem 11 lze skutečně některé z uvažovaných zlomků krátit. Jak tedy najít dvojici nesoudělných čísel p a q tak, aby platilo $11 \mid 3p-q$ a zároveň $11 \mid 5p+2q$? S trochou trpělivosti objevíme takové hodnoty p a q zkusmým dosazováním; stačí však vypsat soustavu rovnic

$$3p-q=11m \quad \text{a} \quad 5p+2q=11n,$$

najít její řešení $(p,q)=(2m+n, 3n-5m)$ a pak pohodlně dosazovat: dvojici nesoudělných čísel p a q určitě dostaneme, když bude $q = 3n-5m = 1$, tedy např. pro $n = 2$ a $m = 1$, kdy $(p,q) = (4,1)$ a uvažovaný zlomek je $11/22$.

Odpověď. Jediné celé číslo větší než 1, kterým lze krátit některý z uvedených zlomků, je číslo 11.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za převod na vztahy $d \mid 3p-q$ a $d \mid 5p+2q$, další 2 body za odvození vztahů $d \mid 11p$ a $d \mid 11q$, další bod za závěr $d = 11$ a zbývající 2 body za uvedení vyhovujícího příkladu dvojice nesoudělných čísel p a q.