58. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Jisté čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Zapíšeme-li jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší čtyřmístné číslo, které je rovněž dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo.

2. Na odvěsnách délek a, b pravoúhlého trojúhelníku leží po řadě středy dvou kružnic k_a, k_b. Obě kružnice se dotýkají přepony a procházejí vrcholem proti přeponě. Poloměry uvedených kružnic označme ϱ_a, ϱ_b. Určete největší kladné reálné číslo p takové, že nerovnost

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big)$$

platí pro všechny pravoúhlé trojúhelníky.

3. Určete velikosti vnitřních úhlů α, β, γ trojúhelníku, pro něž platí

$$2\sin\beta\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha = 1,$$
$$2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) - \cos\beta = 0.$$

4. Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolme bod D a na úsečce AD bod P tak, aby neležel na těžnici z vrcholu C. Přímka této těžnice protne kružnici opsanou trojúhelníku CPD v bodě, který označíme K ($K \neq C$). Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKP prochází kromě bodu A dalším pevným bodem, který na výběru bodů D a P nezávisí.

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 20. ledna 2009

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

58. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Označme hledané číslo $n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ a číslo s opačným pořadím číslic $k = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$. Protože obě čísla k, n dávají stejný zbytek při dělení číslem 37, je jejich rozdíl

$$\begin{aligned} k - n &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 999(d - a) + 90(c - b) = 37 \cdot 27(d - a) + 90(c - b) \end{aligned} \tag{1}$$

dělitelný číslem 37, odkud $37 \mid 90(c - b)$. Jelikož 37 je prvočíslo a číslo 90 není jeho násobkem, musí platit $37 \mid c - b$. To je pro číslice b, c možné jedině v případě, kdy $b = c$. Naopak, je-li $b = c$, plyne z vyjádření (1), že bez ohledu na hodnoty číslic a, d je rozdíl $k-n$ dělitelný číslem 37, takže čísla n a k skutečně dávají při dělení 37 stejný zbytek. Můžeme tedy předpokládat, že $n = \overline{abbd}$ a $k = \overline{dbba}$, a dále se už zabývat pouze podmínkami úlohy o dělitelnosti sedmi.

Z podmínek $7 \mid n$, $7 \mid k$ plyne

$$7 \mid k - n = 37 \cdot 27(d - a)$$

(do vyjádření (1) jsme dosadili $b = c$), odkud vzhledem k nesoudělnosti čísla 7 se součinem $37 \cdot 27$ dostáváme, že $7 \mid d - a$. Protože podle zadání platí $k > n$, platí rovněž $d > a$; takové číslice d, a splňují podmínku $7 \mid d - a$ jedině v případě, kdy $d - a = 7$. Konkrétně je tedy buď $a = 1$ a $d = 8$, nebo $a = 2$ a $d = 9$. (Možnost $a = 0$, $d = 7$ je vyloučena, protože a je první číslicí čtyřmístného čísla n.)

V případě $a = 1$, $d = 8$ budou čísla

$$\begin{aligned} n &= \overline{1bb8} = 1\,008 + 110b = 7 \cdot (144 + 15b) + 5b, \\ k &= \overline{8bb1} = 8\,001 + 110b = 7 \cdot (1\,143 + 15b) + 5b \end{aligned}$$

dělitelná sedmi, právě když bude platit $7 \mid 5b$ neboli $b \in \{0, 7\}$. Dostáváme tak první dvě řešení $n = 1\,008$ a $n = 1\,778$.

Rovněž v případě $a = 2$ a $d = 9$, kdy

$$\begin{aligned} n &= \overline{2\,bb9} = 2\,009 + 110b = 7 \cdot (287 + 15b) + 5b, \\ k &= \overline{9\,bb2} = 9\,002 + 110b = 7 \cdot (1\,286 + 15b) + 5b, \end{aligned}$$

vyjde stejná podmínka $7 \mid 5b$, která vede ke zbylým dvěma řešením $n = 2\,009$ a $n = 2\,779$.

Hledané čtyřciferné číslo je kterékoliv z čísel 1 008, 1 778, 2 009, 2 779 (a žádné jiné).

Jiné řešení. Zachovejme označení čísel n, k a jejich číslic z původního řešení. Začneme-li řešení analýzou podmínek $7 \mid n$ a $7 \mid k$, zjistíme s ohledem na zbytky řádů 10^3, 10^2, 10^1, 10^0 při dělení sedmi (jež jsou po řadě 6, 2, 3, 1), že tyto podmínky lze zjednodušit do tvaru

$$7 \mid 6a + 2b + 3c + d, \quad \text{resp.} \quad 7 \mid 6d + 2c + 3b + a.$$

Sečtením obou výrazů dostaneme $7 \mid 5(b+c)$ neboli $7 \mid b+c$. Zjistíme-li stejně jako v původním řešení, že platí $37 \mid k-n \Leftrightarrow b=c$, z podmínky $7 \mid b+c$ vyplyne $b=c \in \{0,7\}$; z obou zbylých podmínek $7 \mid 6a+d$ a $7 \mid 6d+a$, jež jsou obě ekvivalentní jednomu vztahu $7 \mid d-a$, pak s ohledem na $d>a>0$ najdeme obě vyhovující dvojice číslic $(a,d)=(1,8)$ a $(a,d)=(2,9)$.

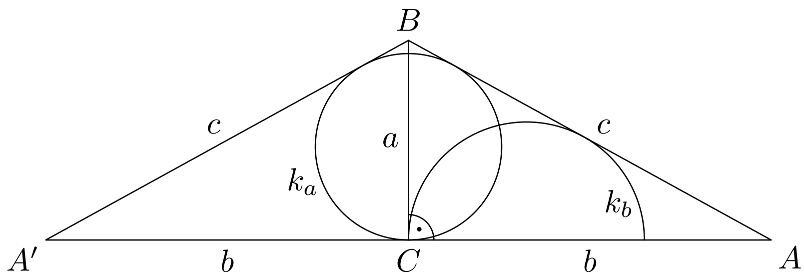
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za stanovení podmínky $b=c$, 2 body za odvození vztahu $d-a=7$, 1 bod za zdůvodnění $7 \mid b\,(=c)$ či za zjištění $7 \mid b+c$, 1 bod za správný výpis všech čtyř řešení.

2. Označme vrcholy daného trojúhelníku A, B, C tak, aby vrcholy A, B ležely postupně proti odvěsnám délek a, b.

Nejdříve vypočítáme velikosti poloměrů obou kružnic k_a a k_b. Označme A' obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky BC. Kružnice k_a je vepsána trojúhelníku $A'AB$ (obr. 1). Rovnoramenný trojúhelník ABA' má obvod $o=2(b+c)$ a obsah $S=ab$, pro poloměr ϱ_a kružnice k_a tak podle známého vztahu vychází

$$\varrho_a = \frac{2S}{o} = \frac{ab}{b+c}.$$

Podobně vypočítáme i poloměr kružnice k_b: vyjde $\varrho_b = ab/(a+c)$.



Obr. 1

Pro číslo p a pro libovolný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c má platit

$$p \leqq \frac{\dfrac{1}{\varrho_a}+\dfrac{1}{\varrho_b}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \frac{\dfrac{b+c}{ab}+\dfrac{a+c}{ab}}{\dfrac{a+b}{ab}} = \frac{a+b+2c}{a+b} = 1+\frac{2c}{a+b} = 1+\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Protože v případě $a=b$ má poslední výraz hodnotu $1+\sqrt{2}$, musí každé vyhovující číslo p splňovat nerovnost $p \leqq 1+\sqrt{2}$. Ukážeme-li nyní, že pro libovolné dvě kladné hodnoty a, b platí

$$\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \geqq \sqrt{2}, \tag{1}$$

bude výše odvozená nerovnost znamenat, že $p=1+\sqrt{2}$ je hledané reálné číslo (a úloha tak bude vyřešena).

Nerovnost (1) pro libovolná kladná a, b snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost, která zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{a^2+b^2} &\geqq \sqrt{2}(a+b),\\
4(a^2+b^2) &\geqq 2(a+b)^2,\\
4a^2+4b^2 &\geqq 2a^2+4ab+2b^2,\\
2(a-b)^2 &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Místo takové prověrky bylo možné využít Cauchyovu nerovnost $2(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2$ nebo nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqq \frac{a+b}{2}$$

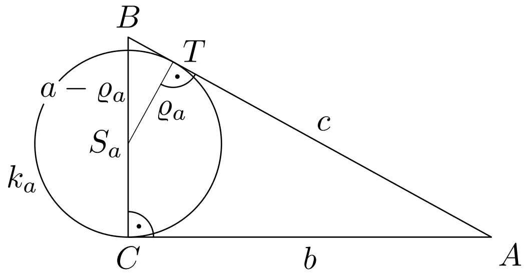
Obě tyto klasické nerovnosti jsou zřejmě pouze obměněnými zápisy nerovnosti (1).

Odpověď. Hledané číslo p má hodnotu $1+\sqrt{2}$.

Poznámka. Velikost poloměrů ϱ_a a ϱ_b je možné vypočítat i jinak: Dvojím vyjádřením sinu úhlu ABC z pravoúhlých trojúhelníků S_aBT a ABC (obr. 2) dostaneme

$$\frac{\varrho_a}{a-\varrho_a} = \frac{b}{c},$$

odkud plyne $\varrho_a = ab/(b+c)$. Analogicky vypočítáme i ϱ_b.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za výpočet velikostí poloměrů ϱ_a a ϱ_b, 1 bod za nalezení hodnoty $p = 1+\sqrt{2}$ a 3 body za důkaz nerovnosti ze zadání pro $p = 1+\sqrt{2}$, přitom řádně pojmenované klasické nerovnosti není nutné dokazovat.

3. Z rovnosti $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ a ze známých goniometrických vzorců dostáváme

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\gamma,\\
\cos\alpha &= -\cos(\beta+\gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

Dosaďme tato vyjádření hodnot $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos\alpha$ do první rovnice ze zadání a výsledek upravme:

$$\begin{aligned}
2\sin\beta\sin\gamma - (-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) &= 1,\\
\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma &= 1,\\
\cos(\beta-\gamma) &= 1.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost nastane, právě když $\beta = \gamma$, neboť rozdíl dvou vnitřních úhlů trojúhelníku leží v intervalu $(-\pi, \pi)$, v němž má funkce kosinus hodnotu 1 jedině v bodě nula. Tak jsme ukázali, že první zadaná rovnice je pro vnitřní úhly trojúhelníku splněna, právě když $\beta = \gamma$.

Nyní snadno vyřešíme i druhou ze zadaných rovnic, když do ní za γ dosadíme β:

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\sin 2\beta - \cos\beta &= 0,\\ 4\sin^2\beta\cos\beta - \cos\beta &= 0,\\ (4\sin^2\beta - 1)\cos\beta &= 0. \end{aligned}$$

Je tedy buď $\cos\beta = 0$, nebo $\sin\beta = \pm\frac{1}{2}$. Rovnost $\beta = \gamma$ však pro úhly trojúhelníku znamená, že úhel β je ostrý, takže $\cos\beta > 0$, a proto musí platit $\sin\beta = \frac{1}{2}$ (hodnota $\sin\beta = -\frac{1}{2}$ je pro úhel β z intervalu $(0, \pi)$ vyloučena). Tak docházíme k jediným možným hodnotám $\beta = \gamma = 30°$, z nichž snadno dopočteme $\alpha = 120°$. Při uvedeném postupu není zkouška nutná: první zadaná rovnice platí díky rovnosti $\beta = \gamma$ a druhou rovnici jsme za předpokladu $\beta = \gamma$ řešili ekvivalentními úpravami.

Jiné řešení. Podobně jako při řešení úlohy domácího kola využijeme známé goniometrické vzorce k odvození rovnosti

$$\begin{aligned} 2\sin y\sin(x+y) - \cos x &= 2\sin y(\sin x\cos y + \cos x\sin y) - \cos x = \\ &= 2\sin y\cos y\sin x + (2\sin^2 y - 1)\cos x = \\ &= \sin 2y\sin x - \cos 2y\cos x = \\ &= -\cos(x+2y) \end{aligned}$$

pro libovolná reálná čísla x, y. Díky tomu můžeme soustavu rovnic ze zadání přepsat do tvaru

$$\cos(\alpha + 2\beta) = -1, \tag{1}$$
$$\cos(\beta + 2\gamma) = 0. \tag{2}$$

Vnitřní úhly libovolného trojúhelníku leží v intervalu $(0, \pi)$, z čehož plynou nerovnosti $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi$.[1] Z nich plyne, že rovnice (1) je splněna, právě když $\alpha + 2\beta = \pi$. Porovnáním s obecně platnou rovností $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dostáváme ekvivalentní podmínku $\gamma = \beta$, za níž (2) přejde do tvaru

$$\cos 3\beta = 0. \tag{3}$$

Protože úhel β je ostrý (neboť je shodný s úhlem γ a trojúhelník nemůže mít dva pravé nebo dva tupé vnitřní úhly), platí nerovnosti $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$, při kterých je rovnice (3) splněna, právě když $3\beta = \frac{1}{2}\pi$ neboli $\beta = \gamma = \frac{1}{6}\pi$. Stejně jako v prvním řešení dopočítáme $\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{2}{3}\pi$. Zkouškou (ani při tomto postupu však není nutná) snadno ověříme, že nalezená trojice úhlů α, β, γ splňuje všechny podmínky zadání úlohy.

[1] Platí dokonce $\alpha + 2\beta < 2\pi$, neboť $\alpha + 2\beta < 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi$.

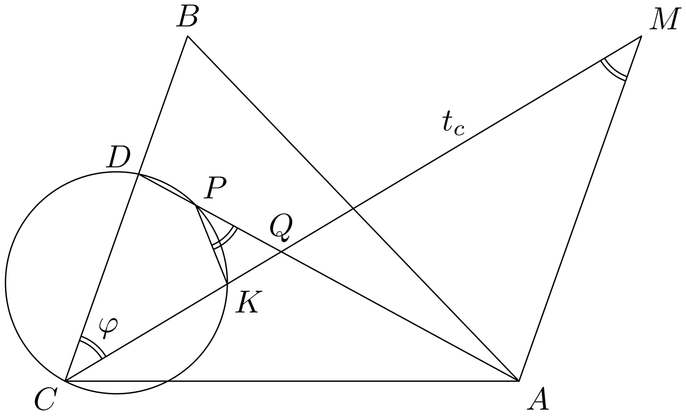
Podmínkám úlohy vyhovují pouze trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly mají velikosti $\alpha = 120°$, $\beta = \gamma = 30°$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu udělte 3 body za odvození vztahu $\beta = \gamma$ z první rovnice, 1 bod za úpravu druhé rovnice na součinový tvar či základní goniometrickou rovnici (jakou je např. $\cos 3\beta = 0$) a zbývající 2 body za následné určení (se zdůvodněním jednoznačnosti) velikostí všech tří úhlů.

Při druhém postupu udělte 2 body za odvození soustavy rovnic (1) a (2) (musí být v základním tvaru), další 2 body za zdůvodnění vztahu $\beta = \gamma$ a zbývající 2 body jako při prvním postupu.

Vyžaduje-li řešitelův postup zkoušku, za její absenci strhněte 1 bod. Rovněž tak strhněte 1 bod pokaždé, když je některá z hodnot $\beta - \gamma$, $\alpha + 2\beta$, 3β apod. určena z příslušné základní goniometrické rovnice bez zmínky potřebných nerovností pro zastoupený argument.

4. Označme φ velikost úhlu, který svírá přímka t_c, na níž leží těžnice z vrcholu C, s přímkou strany BC daného trojúhelníku. Vzhledem k definici bodu K budou stejný úhel φ svírat i přímky KP a AD. To však znamená, že na kružnici opsané trojúhelníku AKP bude ležet i takový bod M přímky t_c, v němž přímka AM protne přímku t_c pod úhlem φ. Takovou vlastnost zřejmě má bod M souměrně sdružený s bodem C podle středu strany AB (který na volbě bodů D a P rovněž nezávisí, obr. 3).

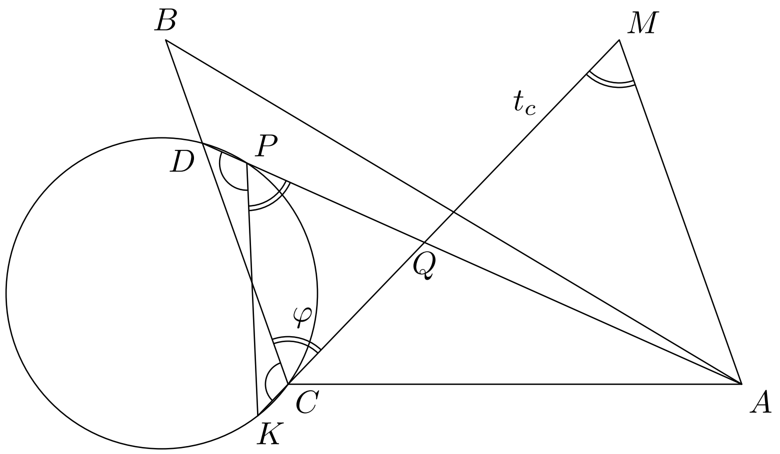


Obr. 3

Dokážeme nyní shora uvedené skutečnosti podrobněji. Označme Q průsečík těžnice t_c s úsečkou AD (Q je tedy „zakázaná“ poloha bodu P). Bod P leží buď uvnitř úsečky DQ (obr. 3), nebo uvnitř úsečky QA (obr. 5).

V prvním případě leží bod Q vně kružnice opsané trojúhelníku CPD, bod K tedy padne dovnitř polopřímky QC. Pokud bod K leží uvnitř úsečky QC, jsou body C a P protilehlými vrcholy tětivového čtyřúhelníku $CDPK$, a tudíž $|\sphericalangle APK| = \varphi$. Navíc body P a M leží vzhledem k přímce AK v téže polorovině, takže ze shodnosti úhlů AMK a APK vyplývá, že čtyřúhelník $AMPK$ je tětivový, proto bod M skutečně leží na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

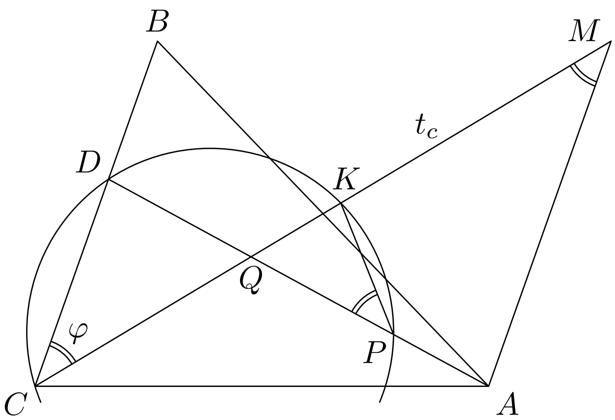
Pokud bod K uvnitř úsečky QC neleží a je $K \neq C$ (obr. 4), je $|\sphericalangle KPD| = |\sphericalangle KCD| = 180° - \varphi$, takže $|\sphericalangle KPA| = \varphi = |\sphericalangle KMA|$. (Poslední rovnost samozřejmě platí i pro $K = C$.) Protože body P a M leží v téže polorovině určené přímkou KA, leží i v tomto případě bod M na kružnici opsané trojúhelníku AKP.



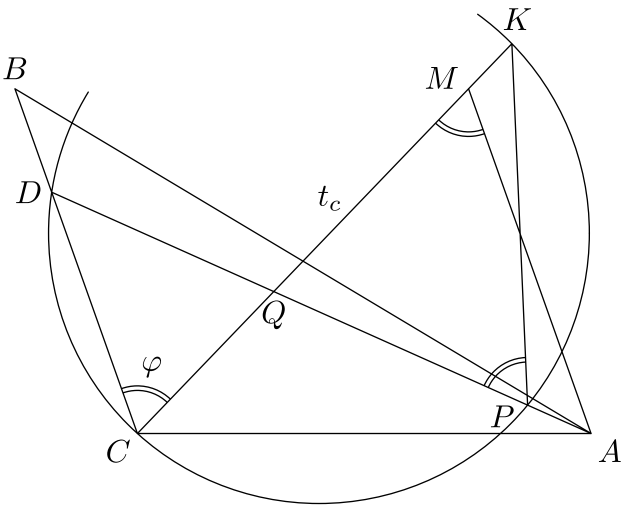
Obr. 4

Ve druhém případě leží bod K uvnitř polopřímky QM. Pokud bod K leží uvnitř úsečky QM (obr. 5), leží body P a M v opačných polorovinách vzhledem k přímce AK a z rovnosti obvodových úhlů DCK a DPK nad tětivou DK plyne $|\sphericalangle DPK| = \varphi = |\sphericalangle AMK|$, což zaručuje, že čtyřúhelník $AMKP$ je tětivový, takže bod M leží na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

Pokud bod K uvnitř úsečky QM neleží (obr. 6), vychází $|\sphericalangle KPA| = |\sphericalangle KMA| = 180^\circ - \varphi$. Protože body P a M leží v téže polorovině určené přímkou KA, leží i v tomto případě bod M na kružnici opsané trojúhelníku AKP.



Obr. 5



Obr. 6

Jiné řešení. Označme body Q a M stejně jako v prvním řešení. Pro mocnost bodu Q ke kružnici opsané bodům C, P, D, K (bez ohledu na polohu bodu P) platí $|QK| \cdot |QC| = |QP| \cdot |QD|$, takže $|QK| : |QP| = |QD| : |QC|$. Z podobnosti trojúhelníků QDC a QAM, jež plyne z rovnoběžnosti přímek BC a AM, dostáváme $|QD| : |QC| = |QA| : |QM|$. Platí tedy

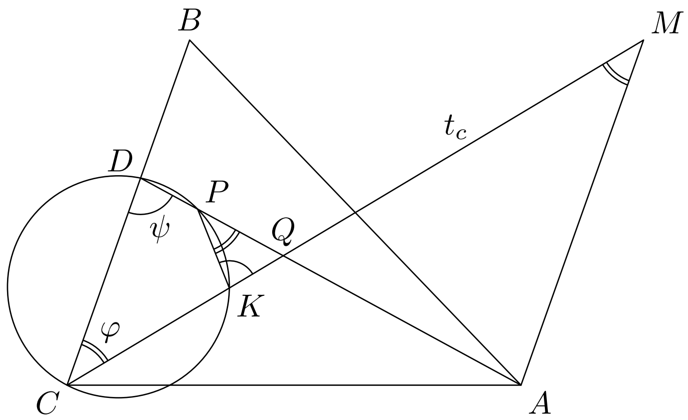
$$\frac{|QK|}{|QP|} = \frac{|QD|}{|QC|} = \frac{|QA|}{|QM|}, \quad \text{takže} \quad |QK| \cdot |QM| = |QP| \cdot |QA|. \tag{1}$$

Jak už víme, leží bod Q buď uvnitř, anebo vně obou úseček AP a KM, proto z právě získané rovnosti vyplývá, že bod M leží na kružnici určené body A, P, K. Označíme-li totiž M' druhý průsečík přímky QK s touto kružnicí ($M' \neq K$), plyne z mocnosti bodu Q vůči této kružnici rovnost $|QK| \cdot |QM'| = |QP| \cdot |QA|$, takže podle (1) je $|QM'| = |QM|$, a musí tudíž být $M' = M$.

Poznámky. V žádném z obou řešení jsme nevyužili předpoklad, že daný trojúhelník ABC je ostroúhlý. Za tohoto předpokladu leží bod K vždy uvnitř úsečky CM. Lze to ukázat úvahami o obvodových úhlech podobně, jako jsme ukázali, že tvrzení úlohy platí i v případech, kdy bod K padne mimo tuto úsečku. Jiný důkaz dostaneme následující úvahou:

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, platí $\psi > \varphi$, kde jsme jako ψ označili velikost úhlu CDA. Tato nerovnost $\psi > \varphi$ plyne ze zřejmé nerovnosti $\psi = \beta + |\sphericalangle DAB| > \beta$ a z nerovnosti $\beta > \varphi$, která je ekvivalentní nerovnosti $t_c > \frac{1}{2}|AB|$ (proti větší straně trojúhelníku leží větší úhel), což je nerovnost $|CM| > |AB|$ mezi délkami úhlopříček rovnoběžníku $CAMB$, jehož vnitřní úhel při vrcholu C je dle předpokladu ostrý (tuto nerovnost získáme snadno použitím kosinové věty: $|AB|^2 < |AC|^2 + |CB|^2 = |AC|^2 + |AM|^2 < |CM|^2$).

Z nerovnosti $\psi > \varphi$ pak pro bod P uvnitř úsečky DQ pro délky stran trojúhelníků QPK, QCD (obr. 7) vychází, že $|QK| < |QP| < |QD| < |QC|$ (proti většímu úhlu v trojúhelníku leží větší strana), takže bod K leží uvnitř úsečky QC. Podobně pro bod P uvnitř úsečky QA dostaneme $|QK| < |QP| < |QA| < |QM|$, takže bod K leží uvnitř úsečky QM.



Obr. 7

Budeme-li úhel φ chápat jako orientovaný úhel dvou přímek (tj. úhel, o který musíme první přímku otočit, aby splynula nebo byla rovnoběžná s druhou přímkou), vyplyne tvrzení úlohy z úvah v úvodním odstavci a z následující charakterizace kružnice: *Body A, B, C, D leží na kružnici, právě když se orientovaný úhel ACB rovná orientovanému úhlu ADB.*

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za objevení pevného bodu M. Pokud žák určí bod M a dokáže požadovanou vlastnost jen v jednom z rozebíraných případů, udělte 5 bodů. Pokud řešitel nedokáže, že bod K (díky předpokladu ostroúhlosti trojúhelníku ABC) padne dovnitř úsečky CM, ani nedokáže obecnější tvrzení bez uvedeného předpokladu, strhněte dva body. Za opomenutí možnosti $K = C$ žádné body nestrhávejte. Řešení jiného typu než uvedené hodnoťte v souladu s tímto schématem.