Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$2\sin x\cos(x+y)+\sin y=1,$$
$$2\sin y\cos(y+x)+\sin x=1.$$

Řešení. Použitím známých vzorců

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\quad \sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=1-2\sin^2 x$$

dostaneme úpravou levé strany první rovnice

$$\begin{aligned}2\sin x\cos(x+y)+\sin y&=2\sin x(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+\sin y=\\&=2\sin x\cos x\cos y+(1-2\sin^2 x)\sin y=\\&=\sin 2x\cos y+\cos 2x\sin y=\\&=\sin(2x+y).\end{aligned}$$

Podobně je levá strana druhé rovnice rovna $\sin(2y+x)$. Daná soustava je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned}\sin(2x+y)&=1,\\ \sin(2y+x)&=1.\end{aligned}\tag{1}$$

Protože funkce sinus nabývá hodnotu 1 právě v bodech tvaru $\frac{1}{2}\pi+2k\pi$, kde k je celé číslo, budou řešením soustavy právě ty dvojice (x,y), pro něž existují celá čísla k, l taková, že

$$2x+y=\tfrac{1}{2}\pi+2k\pi,\quad 2y+x=\tfrac{1}{2}\pi+2l\pi.\tag{2}$$

Odtud buď odečtením vhodných násobků rovnic (např. od dvojnásobku první odečteme druhou), anebo přímým vyjádřením jedné proměnné z první rovnice a dosazením do druhé rovnice po úpravě dostaneme

$$x=\tfrac{1}{6}\pi+\tfrac{2}{3}(2k-l)\pi,\quad y=\tfrac{1}{6}\pi+\tfrac{2}{3}(2l-k)\pi.$$

Řešením soustavy jsou tedy dvojice $(\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}(2k-l)\pi,\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}(2l-k))$, kde k, l jsou libovolná celá čísla. Není nutné dělat zkoušku, neboť z uvedeného postupu vyplývá, že takovéto dvojice (x,y) splňují vztahy (2), a tedy i soustavu (1), která je zadané soustavě ekvivalentní.

Poznámka. Uvedený výsledek se dá zapsat i jinak. Vzhledem k tomu, že $y-x=$ $=\frac{1}{3}(6l-6k)\pi=2(l-k)\pi$, můžeme pro $m=l-k$, $n=2k-l$ psát $x=\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}n\pi$, $y=x+2m\pi$, řešením jsou tedy dvojice $(\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}n\pi,\frac{1}{6}\pi+\frac{2}{3}n\pi+2m\pi)$, kde m, n jsou libovolná celá čísla. (Pokud k, l probíhají všechny možné dvojice celých čísel, platí to i pro čísla m, n.)

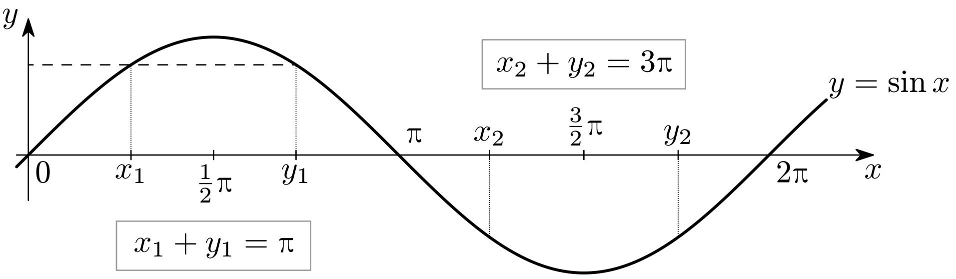
Jiné řešení. Pokud je řešením dané soustavy dvojice (x, y), jsou díky periodicitě funkcí sinus a kosinus s periodou 2π zřejmě řešením i všechny dvojice $(x + 2k\pi, y + 2l\pi)$ (k, l jsou libovolná celá čísla). Budeme tedy soustavu řešit jen v oboru $\langle 0, 2\pi)$ a na konci nalezená řešení „posuneme“ o $(2k\pi, 2l\pi)$, abychom získali obecné řešení.

Odečtením rovnic soustavy získáme po rozkladu levé strany na součin rovnici

$$(\sin x - \sin y)\bigl(2\cos(x + y) - 1\bigr) = 0.$$

Rozlišíme dva případy podle toho, který z činitelů je nulový.

I. Jestliže $\sin x = \sin y$, máme vzhledem k podmínce $x, y \in \langle 0, 2\pi)$ tři možnosti: buď $x = y$, anebo $x + y = \pi$, anebo $x + y = 3\pi$ (obr. 1).



Obr. 1

Pro $x = y$ po dosazení do původní soustavy získáme jedinou rovnici

$$2\sin x\cos 2x + \sin x = 1.$$

Z ní použitím vzorce $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ a po substituci $\sin x = t$ ekvivalentními úpravami postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sin x &= 1,\\ 2t(1 - 2t^2) + t &= 1,\\ 4t^3 - 3t + 1 &= 0,\\ (t + 1)(2t - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Při poslední úpravě jsme „uhodli“ kořen $t = -1$ a rozklad na součin získali vydělením mnohočlenu $4t^3 - 3t + 1$ kořenovým činitelem $t + 1$. Vzhledem k použité substituci $t = \sin x$ jsou řešením poslední rovnice ta $x \in \langle 0, 2\pi)$, pro která buď $\sin x = -1$, anebo $\sin x = \frac{1}{2}$, takže $x \in \{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\}$. Ve zkoumaném oboru jsou řešením dané soustavy dvojice $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ a $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

Pro $x + y = \pi$ či $x + y = 3\pi$ máme $\cos(x + y) = -1$. Dosazením do původní soustavy (vzhledem k předpokladu $\sin x = \sin y$) získáme jedinou rovnici $\sin x = -1$, a tedy i $\sin y = -1$. Ve zkoumaném oboru tak dostáváme jediné řešení $x = y = \frac{3}{2}\pi$, které jsme našli už prve.

II. Jestliže $2\cos(x+y)-1 = 0$ neboli $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$, je $x+y = \pm\frac{1}{3}\pi+2k\pi$ pro nějaké celé k a některé znaménko. Po dosazení do původní soustavy dostaneme jedinou rovnici $\sin x+\sin y = 1$, která díky periodě 2π funkce sinus a následujícímu užití známého vzorce $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$, podle něhož

$$\begin{aligned} \sin y &= \sin(\pm\tfrac{1}{3}\pi + 2k\pi - x) = \sin(\pm\tfrac{1}{3}\pi - x) = \\ &= \sin(\pm\tfrac{1}{3}\pi)\cos x - \cos(\pm\tfrac{1}{3}\pi)\sin x = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\sin x, \end{aligned}$$

přejde do tvaru (zmíněný vzorec uplatníme ještě jednou)

$$1 = \sin x + \sin y = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x = \sin(x \pm \tfrac{1}{3}\pi).$$

Ve zkoumaném oboru tak dostáváme $x \pm \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi$, takže buď (při „horním“ znaménku) $x = \frac{1}{6}\pi$, což vzhledem k rovnosti $y = \frac{1}{3}\pi - x + 2k\pi$ dá jedině $y = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi$), nebo (při „dolním“ znaménku) $x = \frac{5}{6}\pi$ a analogicky dostaneme jediné $y = \frac{5}{6}\pi$. V případě II tedy neexistují jiná řešení než ta, jež jsme objevili už v případě I.

Závěr. Řešením v oboru $\langle 0, 2\pi)$ jsou dvojice $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. V oboru reálných čísel to pak jsou dvojice

$$(\tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi, \tfrac{1}{6}\pi + 2l\pi), \quad (\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, \tfrac{5}{6}\pi + 2l\pi), \quad (\tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi, \tfrac{3}{2}\pi + 2l\pi),$$

kde k a l jsou libovolná celá čísla.

Poznámka. Naznačme ještě jeden možný začátek řešení založený na tom, že z rovnic zadané soustavy vyloučíme společný „složitý“ člen $\cos(x + y)$. Dosáhneme toho, když první rovnici vynásobíme $\sin y$, druhou rovnici vynásobíme $\sin x$ a vzniklé rovnice odečteme. Dostaneme tak rovnici

$$\sin^2 y - \sin^2 x = \sin y - \sin x, \quad \text{po úpravě} \quad (\sin x - \sin y)(1 - \sin x - \sin y) = 0.$$

Musí tedy platit $\sin x = \sin y$ nebo $\sin x + \sin y = 1$. V prvním případě dále postupujeme jako v předchozím řešení, ve druhém případě po dosazení $\sin y = 1 - \sin x$ do první rovnice dané soustavy dostaneme první z rovnic

$$\bigl(2\cos(x + y) - 1\bigr)\sin x = 0, \quad \bigl(2\cos(x + y) - 1\bigr)\sin y = 0,$$

druhou pak odvodíme obdobně. Protože aspoň jeden sčítanec v rovnosti $\sin x + \sin y = 1$ musí být nenulový, vedou předchozí rovnice k závěru, že $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, takže opět můžeme postupovat stejně jako v předchozím řešení.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte platnost známých součtových vzorců

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

[První vzorec se dá dokázat např. vhodným použitím kosinové věty pro trojúhelník, jehož dva vrcholy leží na jednotkové kružnici, přičemž třetí vrchol je jejím středem. Druhý vzorec se dá snadno odvodit z prvního.]

D1. V oboru reálných čísel vyřešte rovnici

$$1 + \sin\frac{x + \pi}{5} \cdot \sin\frac{x - \pi}{11} = 0.$$

[55–A–S–3]

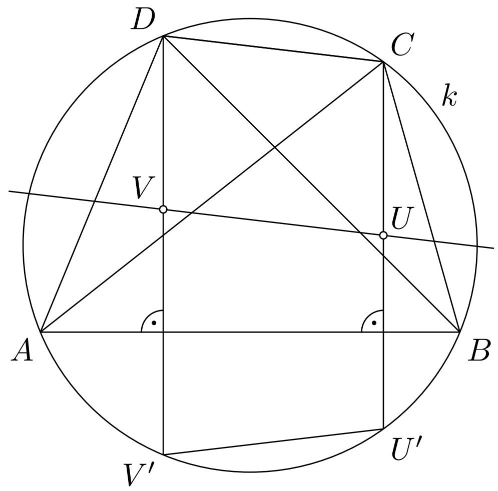
D2. Dokažte, že $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$. [Je-li $\alpha = 36^\circ$, je $\sin 2\alpha = \sin 3\alpha$ neboť $2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$. Protože $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ a

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) &= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1), \end{aligned}$$

dostáváme $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$. Po vydělení nenulovým číslem $\sin\alpha$ máme $4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$. Číslo $t = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ je jediným kladným řešením kvadratické rovnice $4t^2 - 2t - 1 = 0$.]

2. *Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD.*

Řešení. Označme k kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Průsečíky výšek trojúhelníků ABC a ABD označme postupně U a V (obr. 2).



Obr. 2

Několik známých vlastností průsečíku výšek souvisejících s opsanou kružnicí je zachyceno v návodných a doplňujících úlohách. V dané situaci sa nám bude hodit, že obraz U' bodu U v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k, která je trojúhelníku ABC opsána. (To platí i pro tupoúhlý trojúhelník ABC.) Podobně leží na kružnici k i obraz V' bodu V v téže osové souměrnosti.

Předpokládejme, že trojúhelníky ABC a ABD jsou ostroúhlé. Body U a V tedy leží v polorovině ABC. Obě kolmice CU' a DV' na stranu AB jsou rovnoběžné, takže čtyřúhelník $CU'V'D$ je tětivový lichoběžník, který je nutně rovnoramenný.[1] Odtud a z vlastností osové souměrnosti dostáváme rovnosti

$$|\sphericalangle CDV'| = |\sphericalangle U'V'D| = |\sphericalangle UVV'|.$$

Protože body C a U leží v téže polorovině vzhledem k přímce $V'D$, jsou přímky CD a UV rovnoběžné, což jsme měli dokázat. (V poslední úvaze jsme využili, že body D, V, V' leží na přímce v tomto pořadí.)

V případě, kdy je aspoň jeden z trojúhelníků ABC a ABD tupoúhlý, je argumentace velmi podobná. Body C, D, V', U' vždy vytvoří rovnoramenný lichoběžník, i když ne nutně v uvedeném pořadí.

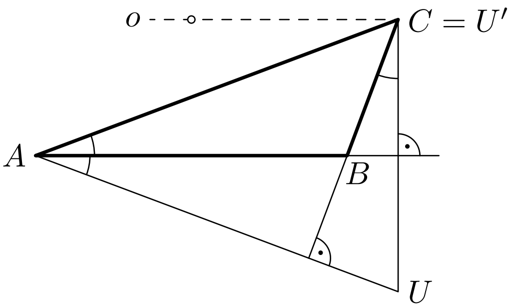
Jiné řešení. Pokud je AB průměrem kružnice k opsané danému tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$, jsou zřejmě oba trojúhelníky ABC a ABD pravoúhlé, takže platí $U = C$, $V = D$ a není co dokazovat.

V opačném případě uvažme osu o kružnice k rovnoběžnou se stranou AB, $o \neq AB$. Jak už víme, obrazy U' a V' bodů U a V v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k opsané oběma trojúhelníkům ABC a ABD. Obě tětivy CU' i DV' jsou kolmé na osu o, takže body C a D jsou obrazy bodů U' a V' v osové souměrnosti podle

[1] Viz úlohu N1.

osy o. To znamená, že úsečka CD je obrazem úsečky UV ve složení obou uvedených osových souměrností. Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je ovšem posunutí, takže $CD \parallel UV$. Tím je tedy tvrzení úlohy dokázáno.

Jsou to opravdu tětivy? Pokud je příslušný trojúhelník ABC či ABD ostroúhlý, není o tom pochyb. Podobně i v případě tupého úhlu při vrcholu C (a tedy i D); v obou případech jsou body C, U' i D, V' odděleny přímkou AB. Zbývá možnost, kdy je tupý úhel při jednom z vrcholů A nebo B (s ohledem na symetrii rozebereme pouze druhou možnost, obr. 3). Je-li $C = U'$, je trojúhelník UCA souměrný podle přímky AB, takže $|\sphericalangle BCU| = |\sphericalangle UAB| = |\sphericalangle CAB|$. Z rovnosti obvodového (CAB) a úsekového (BCU) úhlu tětivy BC nyní plyne, že výška CU je tečnou opsané kružnice, bod $C = U'$ tak leží na ose o (je samodružným bodem zmíněné osové souměrnosti) a postup popsaný v předchozím odstavci je naprosto korektní.



Obr. 3

Jiné řešení. Uvažujme tětivu AB dané kružnice k. Pro libovolný bod C na jednom z oblouků AB kružnice k označme U průsečík výšek příslušného trojúhelníku ABC. Ukážeme, že délka úsečky CU nezávisí na poloze bodu C na zvoleném oblouku AB.

Pokud je AB průměr dané kružnice, je $C = U$ a uvedené tvrzení zřejmě platí. V opačném případě je $U \neq C$. Označme K patu výšky z vrcholu A na stranu BC a L patu výšky z vrcholu C na stranu AB. Výšky AK a CL zřejmě svírají stejný úhel jako přímky BC a AB, k nimž jsou kolmé. To znamená, že úhly CUK a ABC mají stejný sinus. Z pravoúhlých trojúhelníků UKC a AKC tak máme (při označení velikostí stran a úhlů obvyklým způsobem)

$$|CU| = \frac{|CK|}{\sin|\sphericalangle CUK|} = \frac{b|\cos\gamma|}{\sin\beta} = \frac{c|\cos\gamma|}{\sin\gamma},$$

přičemž poslední rovnost plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC. Délka úsečky CU tedy závisí jen na délce úsečky AB a na velikosti příslušného obvodového úhlu ACB. Protože úsečka AB i oblouk kružnice jsou dány, délka úsečky CU se nemění.

Vrcholy C a D daného čtyřúhelníku leží na témže oblouku AB opsané kružnice. Podle předchozí úvahy jsou tedy úsečky CU a DV stejně dlouhé. Coby výšky na tutéž stranu jsou navíc rovnoběžné, a to souhlasně (podle toho, zda je úhel γ ostrý nebo tupý, má vektor $\boldsymbol{CU}$ stejný směr jako $\boldsymbol{CL}$ či opačný). Čtyřúhelník $CDVU$ je tedy rovnoběžník, což znamená, že přímky CD a VU jsou rovnoběžné.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že každý lichoběžník, kterému lze opsat kružnici, je rovnoramenný. [Rameno LM libovolného lichoběžníku $KLMN$ je vidět z vrcholu K pod stejným úhlem jako rameno KN z vrcholu M. Je-li lichoběžník $KLMN$ tětivový, předchozí věta znamená, že tětivy LM a KN opsané kružnice musí být shodné; jsou to však právě obě ramena.]

N2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek V a opsanou kružnicí k. Dokažte, že obraz V' bodu V v osové souměrnosti podle přímky AB leží na kružnici k. Mají stejnou vlastnost i tupoúhlé trojúhelníky? [Stačí vyjádřit velikost úhlu AVB z trojúhelníku AVB, v němž zbylé dva úhly dopočítáme z vhodných pravoúhlých trojúhelníků. Tento úhel má velikost $180° - |\sphericalangle ACB|$, odkud plyne, že čtyřúhelník $ACBV'$ je tětivový. Obraz průsečíku výšek v osové souměrnosti podle strany leží na opsané kružnici i v případě, že trojúhelník je tupoúhlý. Tvrzení dokážeme podobně výpočtem velikostí vhodných úhlů.]

N3. Označme V průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABV, BCV, CAV jsou shodné, a porovnejte jejich poloměr s poloměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC. [Všechny tři kružnice jsou obrazem kružnice opsané trojúhelníku ABC v osové souměrnosti podle příslušné strany. Je to přímý důsledek předcházející návodné úlohy.]

N4. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Vyjádřete velikost úsečky CV pomocí délek stran a velikostí úhlů trojúhelníku ABC. Snažte se, aby vaše vyjádření bylo co nejjednodušší. [Viz poslední uvedené řešení soutěžní úlohy. Možných postupů i vyjádření je více.]

D1. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek V a opsanou kružnicí k. Dokažte, že obraz bodu V ve středové souměrnosti podle středu úsečky AB leží na kružnici k a je jejím nejvzdálenějším bodem od vrcholu C. Mají stejnou vlastnost i tupoúhlé trojúhelníky? [Uvažte, že body A, B, V se zmíněným obrazem tvoří vrcholy rovnoběžníku, o velikosti jeho vnitřního úhlu AVB již víte z úlohy N2.]

D2. V rovině jsou dány tři navzájem různé shodné kružnice se společným bodem V. Druhé průsečíky dvojic těchto kružnic (různé od bodu V) označme A, B, C. Dokažte, že bod V je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. [Využijte toho, že každé z tětiv AV, BV, CV odpovídají ve dvou z daných kružnic stejné obvodové úhly, k důkazu poznatku, že jak úhly AVB a ACB, tak úhly AVC a ABC i úhly BVC a BCA se doplňují do přímého úhlu (rozlište případy různých poloh bodu V vůči trojúhelníku ABC). Při zadaném trojúhelníku ABC má tuto vlastnost jediný bod V – průsečík jeho výšek.]

D3. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že osa úhlu ACB a osa strany AB se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [Střed M oblouku AB leží na ose úhlu ACB, neboť z rovnosti $|AM| = |BM|$ plyne, že obě tětivy AM a BM jsou z bodu C vidět pod stejným úhlem.]

D4. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných postupně trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M postupně na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D5. Na kružnici o poloměru r leží pět různých bodů A, B, C, D, E v tomto pořadí, pričemž platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokažte, že trojúhelník, jehož vrcholy jsou ortocentra trojúhelníků ACD, BCD a BCE, je pravoúhlý. [C-P-S trojstřetnutí 2006/1]

D6. Dokažte, že všechny středy stran a paty výšek v libovolném trojúhelníku leží na jedné kružnici. (Tato kružnice je známa jako *Feuerbachova kružnice* nebo *kružnice devíti bodů* — kromě zmíněných šesti bodů na ní totiž ještě leží středy úseček spojujících průsečík výšek s jednotlivými vrcholy trojúhelníku.) [Uvažte obraz kružnice opsané ve stejnolehlosti se středem v průsečíku výšek a koeficientem $1/2$ a využijte výsledku úloh N2 a D1, viz str. 28–29 brožury O podobnosti v geometrii, ŠMM 7.]

D7. Je dán trojúhelník ABC a bod P v jeho rovině. Označme D, E, F paty kolmic z bodu P na přímky AB, BC, CA. Dokažte, že pokud bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, leží body D, E, F v přímce. (Tato přímka sa nazývá *Simsonovou přímkou* bodu P.) Má stejnou vlastnost i nějaký bod P ležící mimo kružnici opsanou trojúhelníku ABC? [Viz Švrček – Vanžura: Geometrie trojúhelníka, str. 53.]

D8. Nechť P je bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Označme V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že průsečík Simsonovy přímky bodu P s úsečkou PV je středem úsečky PV a leží na Feuerbachově kružnici trojúhelníku ABC. (Řešení této náročné úlohy je možno najít na stránce `http://mathforum.org/library/drmath/view/61688.html`.)

D9. Nechť PQ je libovolný průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že Simsonovy přímky bodů P a Q jsou na sebe kolmé a protínají se na Feuerbachově kružnici trojúhelníku ABC. (Druhá část této úlohy je vskutku náročná.)

3. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.*

Řešení. Předpokládejme, že přirozená čísla x, y a prvočíslo p vyhovují rovnici

$$\frac{xy^2}{x+y} = p. \tag{1}$$

Největší společný dělitel čísel x, y označme d. Potom $x = da$ a $y = db$, kde přirozená čísla a, b jsou (již) nesoudělná. Po dosazení do rovnosti (1), odstranění zlomku násobením a po vydělení kladným číslem d dostaneme

$$d^2ab^2 = p(a+b). \tag{2}$$

Čísla a a b jsou nesoudělná, proto jsou taková i čísla b^2, $a+b$ z různých stran rovnosti (2).[2] To podle známého pravidla[3] znamená, že $b^2 \mid p$. Prvočíslo p má pouze dva dělitele: čísla 1 a p, druhé z nich však není druhou mocninou, proto nutně platí $b = 1$. Po dosazení do (2) obdržíme

$$d^2a = p(a+1). \tag{3}$$

Zopakujme podobnou úvahu jako dříve. Protože a dělí levou stranu rovnosti (3), dělí i její pravou stranu, což vzhledem ke zřejmé nesoudělnosti čísel a, $a+1$ vede k závěru, že $a \mid p$. Platí proto buď $a = 1$, nebo $a = p$. Oba případy nyní posoudíme odděleně.

Po dosazení $a = 1$ do (3) dostaneme $d^2 = 2p$. Protože p je prvočíslo, číslo $2p$ je druhou mocninou jedině v případě $p = 2$. Potom rovněž platí $d = 2$ a výsledek vede k první vyhovující dvojici $x = da = 2$, $y = db = 2$.

Po dosazení $a = p$ do (3) a vydělení kladným p dostaneme $d^2 = p + 1$ neboli $p = (d+1)(d-1)$. Takový rozklad prvočísla p na dva činitele ($d - 1 < d + 1$) je jediný: $d - 1 = 1$ a $d + 1 = p$. Odtud dostáváme $d = 2$, $p = 3$, takže druhá vyhovující dvojice je $x = da = dp = 6$ a $y = db = 2$.

I když můžeme provést zkoušku obou řešení snadným dosazením do rovnice (1), při našem postupu taková kontrola není nezbytná, neboť jsme rovnici v daném oboru upravovali ekvivalentně.

Odpověď: Úloze vyhovují právě dvě dvojice (x, y), a to $(2, 2)$ a $(6, 2)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Jsou-li čísla a, b nesoudělná, tj. $\mathrm{nsd}(a, b) = 1$, pak také platí: a) $\mathrm{nsd}(b, a + b) = 1$; b) $\mathrm{nsd}(b^2, a+b) = 1$; c) $\mathrm{nsd}(a+b, a^2+b^2) = 1$, je-li číslo $a+b$ liché. Dokažte. [a) Kdyby čísla b a $a + b$ měla společného dělitele $d > 1$, číslo d by dělilo i jejich rozdíl, který se rovná číslu a, tedy číslo d by dělilo jak a, tak i b, spor. b) Kdyby čísla b^2 a $a + b$ měla společného dělitele $d > 1$, měla by i společného prvočinitele p, který by dělil nejen b^2, ale i b, takže čísla b a $a+b$ by byla soudělná, což by odporovalo výsledku a). c) Z rovnosti $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$ plyne, že kdyby čísla $a + b$, $a^2 + b^2$ měla společného lichého prvočinitele, byl by to i prvočinitel součinu $2ab$, a tedy i prvočinitel aspoň jednoho z čísel a, b, což by opět odporovalo výsledku a).]

N2. Platí-li pro celá k, l, m vztahy $\mathrm{nsd}(k, l) = 1$ a $k \mid lm$, pak $k \mid m$; dokažte. [Z $k \mid lm$ plyne $lm = kt$ pro vhodné celé t. Z porovnání rozkladu na prvočinitele čísla $lm = kt$ při nesoudělnosti čísel k, l plyne, že každý prvočinitel čísla k musí být prvočinitelem čísla m (přesněji: každý prvočinitel p čísla k je v rozkladu čísla m zastoupen tolikrát, kolikrát je zastoupen v rozkladech k a t dohromady). To znamená, že $k \mid m$.]

D1. Určete všechny dvojice prvočísel p, q, pro které platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

D2. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55–C–II–4]

---

[2] Viz úlohu N1.

[3] Viz úlohu N2.

4. *Uvažujme nekonečnou aritmetickou posloupnost*

$$a, a+d, a+2d, \dots, \qquad (*)$$

kde a, d jsou přirozená (tj. kladná celá) čísla.

a) Najděte příklad posloupnosti $(*)$*, která obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel pro všechna* $k = 2, 3, \dots$

b) Najděte příklad posloupnosti $(*)$*, která neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla pro žádné* $k = 2, 3, \dots$

c) Najděte příklad posloupnosti $(*)$*, která neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla, ale obsahuje nekonečně mnoho třetích mocnin přirozených čísel.*

d) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, d, k $(k > 1)$ *platí: Posloupnost* $(*)$ *buď neobsahuje žádnou k-tou mocninu přirozeného čísla, anebo obsahuje nekonečně mnoho k-tých mocnin přirozených čísel.*

Řešení. a) Položme například $a = 1$, $d = 1$. Posloupnost $(*)$ pak má tvar

$$1, 2, 3, 4, \dots,$$

tj. obsahuje všechna přirozená čísla. Mezi nimi je samozřejmě nekonečně mnoho k-tých mocnin pro každé k. (Vyhovující a, d v této triviální části úlohy je možné zvolit i mnohými jinými způsoby.)

b) Položme například $a = 2$, $d = 4$. Posloupnost $(*)$ pak má tvar

$$2, 6, 10, 14, \dots,$$

tj. je tvořena sudými čísly tvaru $4n+2$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$ Tato posloupnost proto určitě neobsahuje žádnou k-tou mocninu *lichého* čísla. Všimněme si, že k-tá mocnina libovolného *sudého* čísla je dělitelná číslem 2^k, tedy i číslem 4 (uvažujeme pouze exponenty $k \geqq 2$), tuto vlastnost však nemá žádné číslo tvaru $4n + 2$. Zvolená postupnost proto neobsahuje k-tou mocninu žádného přirozeného čísla, ať je $k = 2, 3, \dots$ zvoleno jakkoliv.

(Podobně je možné zdůvodnit, že úloze b) vyhovuje každá posloupnost, kterou dostaneme volbou $a = p$, $d = p^2$ pro libovolné prvočíslo p; popsaný případ odpovídá hodnotě $p = 2$.)

c) Položme například $a = 8$, $d = 16$. Posloupnost $(*)$ pak má tvar

$$8, 24, 40, 56, \dots,$$

tj. je tvořena lichými násobky osmi tvaru $8(2n+1)$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Vysvětlíme, proč zvolená posloupnost neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla. Každý její člen $8(2n+1)$ má totiž prvočíslo 2 ve svém rozkladu na prvočinitele zastoupeno třikrát ($8 = 2^3$ a číslo $2n+1$ je liché), zatímco každá druhá mocnina má ve svém rozkladu *sudý* počet výskytů jakéhokoliv prvočísla.

Na druhé straně, ve zvolené posloupnosti jsou zastoupeny všechny třetí mocniny $8 \cdot 1^3, 8 \cdot 3^3, 8 \cdot 5^3, \dots$, protože třetí mocnina lichého čísla je opět číslo liché, tedy tvaru $2n + 1$, a všechna čísla tvaru $8(2n + 1)$ naše posloupnost obsahuje.

Zvolená posloupnost tedy úloze c) vyhovuje. (Opět jsme mohli čísla a a d zvolit jinak, např. obecněji $a = p^3$ a $d = p^4$, kde p je libovolné prvočíslo.)

d) Předpokládejme, že pro dané $k > 1$ se v posloupnosti $(*)$ vyskytuje aspoň jedna k-tá mocnina, řekněme číslo m^k, kde m je přirozené. Ze vzorce pro obecný člen aritmetické posloupnosti pak plyne, že pro některé celé nezáporné číslo n platí rovnost $m^k = a + nd$. Ukažme, že pak v posloupnosti $(*)$ leží (spolu s mocninou m^k) všechny mocniny $(m + d)^k$, $(m + 2d)^k$, $(m + 3d)^k$, ... (kterých je nekonečně mnoho).

Vezměme rovnou obecný člen z vypsaných k-tých mocnin, tedy mocninu $(m+td)^k$, kde t je celé kladné číslo. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}(m + td)^k &= m^k + km^{k-1}td + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d^2 + \ldots + kmt^{k-1}d^{k-1} + t^kd^k = \\ &= m^k + d \cdot \bigl(km^{k-1}t + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d + \ldots + kmt^{k-1}d^{k-2} + t^kd^{k-1}\bigr) = \\ &= m^k + d \cdot M = (a + nd) + dM = a + d(n + M).\end{aligned}$$

Protože M (výraz ve velké závorce) je zřejmě přirozené číslo, hodnota $(m + td)^k = a + d(n + M)$ je členem posloupnosti $(*)$ pro každé přirozené t. Tím je požadovaná vlastnost naší posloupnosti dokázána.

Poznamenejme, že namísto binomické věty jsme v posledním odstavci mohli využít kongruence[4]. Každá aritmetická posloupnost $(*)$ je totiž tvořena právě těmi celými čísly x, pro něž platí $x \equiv a \pmod{d}$ a $x \geqq a$. Jak je známo, platí implikace: jestliže $x \equiv y \pmod{d}$, pak $x^k \equiv y^k \pmod{d}$ pro každé přirozené k. Díky tomuto *pravidlu o umocnění* můžeme celé řešení úlohy d) pojmout takto: má-li pro dané k kongruence $x^k \equiv a \pmod{d}$ nějaké řešení $x = m$ s vlastností $m \geqq a$, je jejím řešením i každé takové x, pro něž $x \equiv m \pmod{d}$. (V původním řešení bychom mohli tedy vzít i např. mocninu $(m - d)^k$, kdyby platilo $a + d \leqq m$.)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že aritmetická posloupnost $12, 20, \ldots$ obsahuje nekonečně mnoho druhých mocnin přirozených čísel, neobsahuje však žádnou jejich třetí mocninu. [Daná posloupnost obsahuje druhé mocniny čísel $4k + 2$. Každé číslo dané posloupnosti je dělitelné čtyřmi, ne však osmi (číslem, jehož násobky jsou třetí mocniny všech sudých čísel).]

N2. Tvrzení z části d) dokažte nejprve pro případ $k = 2$, tj. dokažte, že posloupnost $(*)$ buď neobsahuje žádnou druhou mocninu, nebo jich obsahuje nekonečně mnoho.

D1. Najděte příklad takové posloupnosti $(*)$, že součin jejích prvních 2 009 členů je druhou mocninou přirozeného čísla. [Položíme-li $d = a$, bude součin prvních 2 009 členů roven číslu $2\,008! \cdot a^{2009}$, což je druhá mocnina např. pro $a = 2\,008!$.]

5. *V každém vrcholu pravidelného* 2008*úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:*

a) na 8 hromádek po 251 minci,

b) na 251 hromádek po 8 mincích.

[4] S tímto způsobem počítání se zbytkovými třídami se lze seznámit v brožuře A. Apfelbecka: *Kongruence*, Mladá fronta, edice Škola mladých matematiků, Praha 1968.

Řešení. Očíslujme vrcholy daného mnohoúhelníku po řadě čísly 1, 2, …, 2 008.

a) Popíšeme rovnou jeden z postupů jak přesouvat mince, abychom je dostali na 8 hromádek po 251 mincích.

Nejprve mince z prvních 251 vrcholů s čísly $1, 2, \ldots, 251$ postupně shromáždíme na jedné hromádce ve vrcholu s číslem 251, přitom jejich pohyb budeme vyvažovat zřejmým „symetrickým“ přesouváním mincí z posledních 251 vrcholů s čísly $1\,758, 1\,759, \ldots, 2\,008$ do vrcholu s číslem 1 758. Takto vytvoříme první dvě požadované hromádky. Podobným způsobem pak shromáždíme mince z vrcholů 252 až 502 na jedné hromádce ve vrcholu s číslem 502. Jejich pohyb opět symetricky vyvážíme vytvořením stejně početné hromádky ve vrcholu s číslem rovným rozdílu $1757-250$, tedy s číslem 1507. Postup zopakujeme ještě dvakrát; poslední dvě hromádky s 251 mincemi dostaneme v sousedních vrcholech s čísly 1004 a 1005.

b) Dokážeme, že žádný postup ke kýženému cíli nevede.

Přiřaďme každé minci číslo vrcholu, v němž se (aktuálně) nachází. Všimněme si, jak se změní součet S všech 2 008 čísel přiřazených jednotlivým mincím, když povoleným způsobem přesuneme libovolnou dvojici mincí. Nenastane-li přitom přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008, hodnota součtu S se zřejmě nezmění, neboť jedné z přesouvaných mincí se přiřazené číslo o 1 zvětší, druhé přesouvané minci se přiřazené číslo o 1 zmenší (čísla přiřazená ostatním mincím, jež zůstaly na místě, se nezmění). Pokud však přesun mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008 nastane a nejde-li přitom o bezvýznamnou výměnu mince z vrcholu 1 za minci z vrcholu 2 008 a naopak, součet S se změní na hodnotu $S \pm 2\,008$, neboť čísla přiřazená přesouvaným mincím se buď obě zvětší, nebo obě zmenší, a to v obou případech o hodnoty 1 a 2 007.

Naše úvahy o aktuálních hodnotách součtu S přiřazených všem mincím můžeme shrnout takto: po libovolném počtu přesunů dvojic mincí se hodnota S z počáteční hodnoty $S_0 = 1 + 2 + \ldots + 2\,008$ dostane na hodnotu $S = S_0 + 2\,008k$, kde k je vhodné celé číslo. Snadno určíme hodnotu $S_0 = 1\,004 \cdot 2\,009$. Kdybychom připustili, že po určitém počtu přesunů dvojic mincí vznikne 251 hromádek po 8 mincích ve vrcholech, jejichž čísla označíme $v_1, v_2, \ldots, v_{251}$, musela by platit rovnost

$$1\,004 \cdot 2\,009 + 2\,008k = 8(v_1 + v_2 + \ldots + v_{251}),$$

kterou však nesplňuje žádné celé číslo k, neboť její pravá strana je násobkem osmi, zatímco levá strana nikoliv (číslo $2\,008k$ násobkem osmi je, číslo $1\,004 \cdot 2\,009$ nikoliv). Tím je tvrzení o neexistenci hledaného postupu dokázáno.

Dodejme pro zajímavost, že úvaha o součtu S není v rozporu s výsledkem části a). Postupu popsanému v řešení a) odpovídá rovnice

$$1\,004 \cdot 2\,009 + 2\,008k = 251(v_1 + v_2 + \ldots + v_8),$$

a to dokonce s hodnotou $k = 0$ (žádný přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2 008 jsme neprovedli). Z uvedené rovnice s hodnotou $k = 0$ plyne, že čísla vrcholů osmi konečných hromádek musejí splňovat rovnici

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_8 = 4 \cdot 2\,009,$$

ať volíme jakýkoliv postup bez přesunu mince mezi vrcholy 1 a 2 008. Při našem postupu za rostoucího pořadí čísel v_i platí

$$v_1 + v_8 = v_2 + v_7 = v_3 + v_4 = v_5 + v_6 = 2\,009.$$

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na stole je n pohárů, všechny jsou postaveny dnem vzhůru. V jednom kroku smíme otočit libovolných k pohárů naopak (k je dané, neměnné). Je možné, aby po konečném počtu kroků bylo všech n pohárů postaveno dnem dolů? Řešte nejprve pro $n = 9$ a $k = 5$, potom pro $n = 9$ a $k = 4$. [Pro $n = 9$ a $k = 5$ to zřejmě možné je. Pro $n = 9$ a $k = 4$ to možné není, protože obecněji platí: při sudém k a libovolném n se nemění parita počtu pohárů postavených dnem vzhůru (tj. tento počet je buď neustále sudé, nebo neustále liché číslo).]

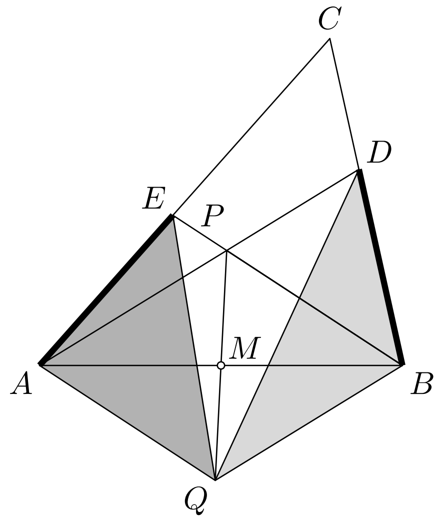
N2. V každém vrcholu čtverce je jedna mince. Vybereme dvě z nich a přemístíme je do sousedních vrcholů podle pravidla ze soutěžní úlohy. Rozhodněte, zda je takto možné přemístit všechny 4 mince do jednoho vrcholu. [Není to možné: podobně jako v řešení soutěžní úlohy uvažujte součet čísel vrcholů přirazených mincím podle jejich aktuální pozice a využijte dělitelnost čtyřmi.]

N3. Předchozí úlohu zobecněte pro případ n mincí, po jedné ve vrcholech pravidelného n-úhelníku. Dokažte, že přesun všech mincí na jednu hromádku je možný, právě když je n liché. [Postup při lichém $n = 2k + 1$ je zřejmý (do vrcholu s číslem $k + 1$ postupně přesuneme dvojice mincí z vrcholů s čísly 1 a $2k + 1$, 2 a $2k$, $\ldots$, k a $k + 2$), při sudém n není počáteční součet čísel vrcholů přiřazených mincím podle jejich pozic násobkem čísla n; při přesunech dvojic mincí se nemění zbytek takového součtu při dělení číslem n.]

D1. Na hranici kruhu stojí 2 jedničky a 48 nul v pořadí $1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0$. V jednom kroku je povoleno přičíst číslo 1 ke kterýmkoliv dvěma sousedním číslům. Můžeme po několika krocích dosáhnout toho, aby všech 50 čísel bylo stejných? [Není to možné; označte čísla po řadě $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ a vysvětlete, proč výraz $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{49} - x_{50}$ nemění svou hodnotu (nezapomeňte na možnou změnu sousedů x_1 a x_{50}).]

6. *Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř stran AC, BC jsou dány body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M střed strany AB a P průsečík přímek AD a BE. Dokažte, že obraz bodu P v středové souměrnosti se středem M leží na ose úhlu ACB.*

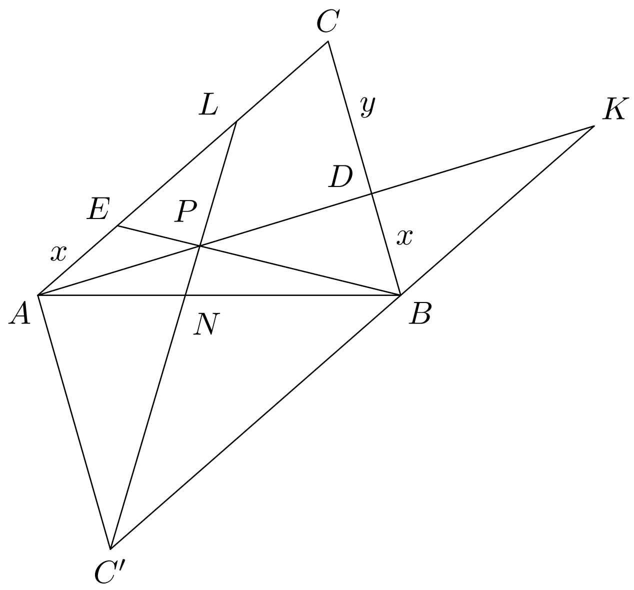
Řešení. Označme Q obraz bodu P ve středové souměrnosti se středem M. Bod Q bude ležet na ose úhlu ACB, právě když bude mít stejnou vzdálenost od obou přímek AC a BC. Vzhledem k tomu, že úsečky AE a BD mají stejnou délku, vidíme, že bod Q bude stejně vzdálen od přímek AC a BC, právě když trojúhelníky AEQ a BDQ budou mít stejný obsah (obr. 4). Rovnost jejich obsahů teď dokážeme.



Obr. 4

Z konstrukce bodu Q plyne, že $AQBP$ je rovnoběžník, tj. přímka QB je rovnoběžná s přímkou AD, proto mají trojúhelníky QBD a QBA stejný obsah (mají shodné výšky na společnou základnu QB). Podobně z rovnoběžnosti přímek QA a BE plyne rovnost obsahů trojúhelníků QAE a QAB. Tím je rovnost obsahů trojúhelníků AEQ a BDQ dokázána, a tudíž je dokázáno i tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Označme C' obraz bodu C a Q obraz bodu P ve středové souměrnosti podle středu M. Dále označme K průsečík přímek $C'B$ a AD. Průsečíky přímky $C'P$ s přímkami AB a AC označme N a L (obr. 5).



Obr. 5

Máme dokázat, že bod Q leží na ose úhlu ACB, což je díky vlastnostem středové souměrnosti ekvivalentní tomu, že bod P leží na ose úhlu $AC'B$ (vnitřního úhlu v trojúhelníku $AC'B$). Je známo (viz druhou návodnou úlohu), že toto nastane, právě když bod N rozdělí úsečku AB v poměru délek úseček AC' a BC'. Pokusíme se tedy určit poměr $|AN|:|BN|$.

Označme $|BD| = |AE| = x$, $|CD| = y$ a $|AC| = b$. Trojúhelníky ADC a KDB jsou podobné, proto

$$\frac{|BK|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{x}{y}, \quad \text{takže} \quad \frac{|BK|}{|BC'|} = \frac{x}{y}.$$

Ze stejnolehlosti se středem v bodě P tak plyne

$$\frac{|AE|}{|EL|} = \frac{|BK|}{|BC'|} = \frac{x}{y}, \quad \text{takže} \quad |EL| = y \quad \text{a} \quad |AL| = x + y = |BC| = |AC'|.$$

Konečně z podobnosti trojúhelníků ANL a BNC' dostáváme

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AL|}{|BC'|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}.$$

To, jak jsme před výpočtem poměru $|AN|:|BN|$ zmínili, znamená, že přímka $C'N = C'P$ je osou úhlu $AC'B$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že osa vnitřního úhlu v trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru délek přilehlých stran. [Označme K průsečík osy úhlu ACB se stranou AB, použijeme sinovou větu v trojúhelnících CKA a CKB a využijeme toho, že úhly AKC a BKC jsou doplňkové a úhly ACK a BCK mají stejnou velikost. Jiná možnost: poměr $|AK| : |BK|$ je stejný jako poměr obsahů trojúhelníků AKC a BKC, neboť tyto dva trojúhelníky mají shodné výšky z vrcholu K.]

N2. Je dán trojúhelník ABC. Najděte množinu bodů X takových, že trojúhelník ABX má stejný obsah jako trojúhelník ABC. [Dvojice přímek rovnoběžných s přímkou AB ve vzdálenosti vrcholu C od strany AB.]

N3. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Dokažte, že průsečík úhlopříček AC a BD, průsečík přímek AD a BC a středy základen daného lichoběžníku leží v přímce. [Uvažujme stejnolehlost, která zobrazí úsečku AB na úsečku CD. Takové stejnolehlosti jsou dvě a jejich středy jsou ty dva průsečíky ze zadání úlohy. Protože stejnolehlost zachovává poměry, každá z uvažovaných stejnolehlostí zobrazí střed úsečky AB na střed úsečky CD a její střed tak leží na spojnici středů základen.]

N4. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Středy jeho stran označme postupně K, L, M, N.
   a) Dokažte, že $KLMN$ je rovnoběžník.
   b) Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$.

D1. Dokažte, že těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě a rozdělí trojúhelník na šest částí se stejným obsahem.

D2. Dokažte, že pokud x, y, z jsou délky těžnic trojúhelníku ABC, existuje trojúhelník s délkami stran rovnými x, y, z. Jaký obsah má tento trojúhelník, je-li obsah trojúhelníku ABC roven S? [Využijte středovou souměrnost např. podle středu strany BC. Obsah je $3/4S$.]

D3. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran BC, CA, AB uvažujme postupně body K, L, M takové, že úsečky AK, BL, CM se protínají v bodě U. Mají-li trojúhelníky AMU a KCU obsah P a trojúhelníky MBU a CLU obsah Q, potom $P = Q$. Dokažte. [49–A–S–2]

D4. Je dán trojúhelník ABC a body K, L, M ležící postupně uvnitř stran BC, CA, AB tak, že přímky AK, BL, CM mají společný bod X.
   a) Dokažte, že poměr $|AM| : |BM|$ je stejný jako poměr obsahů trojúhelníků ACX a BCX.
   b) Dokažte, že

$$\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} = 1.$$

   (Toto tvrzení je částí *Cevovy věty*. Porovnejte tuto větu s *Menelaovou větou*. Všimněte si, že často je výhodné ve výpočtech i důkazech převést poměr vzdáleností na poměr obsahů. Použijte tento přístup v druhé návodné úloze.) [Viz Švrček – Vanžura: Geometrie trojúhelníka, str. 28–32.]

D5. Jsou-li K, L, M po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk, pak se přímky AK, BL, CM protínají v jednom bodě. Dokažte. [49–A–I–2]

D6. Určete všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ s následující vlastností: Uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ existuje bod E takový, že každá přímka, která prochází tímto bodem a protíná strany AB a CD ve vnitřních bodech, dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části se stejným obsahem. Svou odpověď zdůvodněte. [49–A–II–4]