57. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Trojúhelník ABC splňuje při obvyklém značení délek stran podmínku $a \leqq b \leqq c$. Vepsaná kružnice se dotýká stran AB, BC a AC po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že z úseček AK, BL a CM lze sestrojit trojúhelník, právě když platí $b + c < 3a$.

2. Klárka udělala chybu při písemném násobení dvou dvojmístných čísel, a tak jí vyšlo číslo o 400 menší, než byl správný výsledek. Pro kontrolu vydělila číslo, které dostala, menším z násobených čísel. Tentokrát počítala správně a vyšel jí neúplný podíl 67 a zbytek 56. Která čísla Klárka násobila?

3. Dokažte, že pokud ve skupině šesti osob existuje aspoň deset dvojic známých, pak v ní lze nalézt tři osoby, které se znají navzájem. Vztah „znát se" je vzájemný, tzn. jestliže osoba A zná osobu B, pak také B zná A. Ukažte, že taková trojice existovat nemusí, jestliže ve skupině šesti osob je méně než deset dvojic známých.

4. Najděte všechny trojice celých čísel x, y, z, pro něž platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

Krajské kolo kategorie C se koná

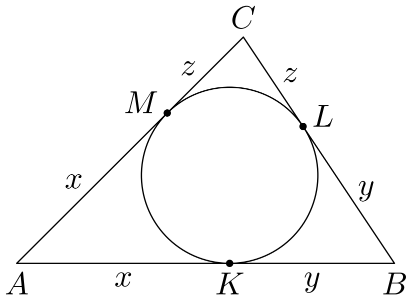
v úterý 1. dubna 2008

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

57. ročník matematické olympiády

Řešení úloh krajského kola kategorie C

1. Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 1) shodné



Obr. 1

úseky tečen z jednotlivých vrcholů trojúhelníku k vepsané kružnici. Zřejmě platí:

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{1}$$

Z uvedených rovností vidíme, že daná podmínka

$$b + c < 3a \tag{2}$$

je ekvivalentní nerovnosti

$$x < y + z, \tag{3}$$

což je nutná podmínka existence trojúhelníku se stranami délek x, y a z.

Dosazením z (1) do podmínek $b \leqq c$ a $a \leqq b$ zjistíme, že $z \leqq y$ a $y \leqq x$. To znamená, že další dvě trojúhelníkové nerovnosti $y < z + x$ a $z < x + y$ jsou automaticky splněny, takže nerovnost (3), a tím i (2) je podmínkou postačující. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za nalezení rovností (1), 2 body za zjištění ekvivalence vztahů (2) a (3) a 3 body za důkaz, že podmínka (3) je nejen nutná, ale i postačující.

2. Označme x menší a y větší z násobených čísel. Podle zadání platí $xy - 400 = 67x + 56$, neboli

$$x(y - 67) = 456. \tag{1}$$

Číslo x je tedy dvojmístný dělitel čísla $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$. Ze zadání navíc plyne, že číslo x je větší než příslušný zbytek 56. Nejmenší takové x je $x = 3 \cdot 19 = 57$. Pro každý další takový dělitel platí $x \geqq 4 \cdot 19 = 76$ a $y - 67 \leqq 2 \cdot 3 = 6$, takže $y \leqq 73 < x$, což odporuje zvolenému označení $x < y$. Je tedy $x = 57$ a $y = 75$. Snadno ověříme, že tato čísla vyhovují zadání úlohy.

Závěr. Klárka násobila čísla 57 a 75.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Takové je samozřejmě i řešení, jež prověří všech 16 dělitelů čísla 456 v (1). Za nalezení rovnice (1) či jiného ekvivalentního vztahu udělte 3 body, 2 body za analýzu jejích řešení a 1 bod za zkoušku, tj. ověření, že dvojice $(x, y) = (57, 75)$ splňuje všechny podmínky úlohy. Za pouhé uhodnutí hledaných čísel (bez sestavování rovnice) a provedení zkoušky udělte celkem 2 body.

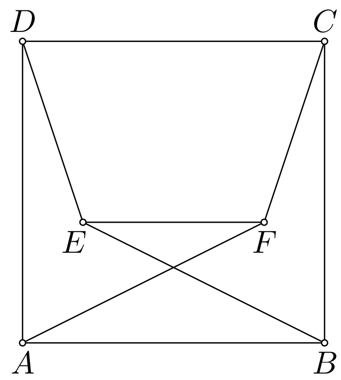
3. Nazvěme A osobu (případně jednu z osob), která má v dané skupině nejvíce známých, a tento počet známých označme n. Zřejmě je $n \leqq 5$.

Je-li $n = 5$, existuje mezi zbývajícími osobami aspoň pět dalších dvojic známých. Kterákoliv z těchto dvojic pak tvoří s osobou A trojici známých.

Je-li $n = 4$, existuje osoba B, která se s A nezná, a ta má rovněž nejvýše čtyři známé. Proto se mezi známými osoby A vyskytují aspoň dvě dvojice známých. Osoba A s jednou z těchto dvojic tvoří opět trojici známých.

Situace $n \leqq 3$ nemůže nastat, protože celkový počet dvojic známých ve skupině je pak nejvýše $\frac{1}{2} \cdot 6n \leqq 9$.

Příklad skupiny šesti osob s devíti dvojicemi, ale s žádnou trojicí známých, je znázorněn grafem na obr. 2. V něm body A, B, C, D, E a F představují jednotlivé osoby a dvojice známých jsou vyznačeny úsečkami. Přitom žádné tři z úseček netvoří trojúhelník. Pokud je ve skupině méně než devět dvojic známých, sestrojíme vhodný příklad odstraněním příslušného počtu úseček z obr. 2 (přitom určitě žádný trojúhelník nevznikne).



Obr. 2

Jiné řešení. Je-li v šestici osob aspoň 10 dvojic známých, je v ní nejvýše 5 dvojic neznámých, neboť všech dvojic je právě 15. Budeme proto naopak předpokládat, že v každé trojici se najde dvojice neznámých, a dokážeme, že v celé šestici je takových dvojic alespoň 6. Za uvedeného předpokladu můžeme označení osob zvolit tak, aby v trojicích ABC a DEF byly dvojice neznámých AB a DE. Pak další čtyři různé dvojice neznámých najdeme (po jedné) v trojicích ACD, AEF, BCE, BDF (přesvědčte se, že každá dvojice se vyskytuje nejvýše v jedné z uvedených čtyř trojic a žádná z těchto trojic neobsahuje ani dvojici AB, ani dvojici DE).

Příklad pro menší počet dvojic známých sestrojíme stejně jako v předchozím řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz existence trojice známých pro aspoň 10 dvojic známých udělte 3 body. Další 3 body udělte, jestliže řešitel nalezne pro 9 dvojic známých příklad, v němž není trojice známých, a ukáže, jak postupovat pro menší počet dvojic známých. Uvede-li pouze příklad pro 9 dvojic známých, strhněte bod. Uvede-li pouze příklady pro některé počty dvojic menší než 9, strhněte 2 body.

4. Rovnici přepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \tag{1}$$

Pro $x \neq z$ a $y \neq z$ nemůže rovnost (1) platit, protože její pravá strana je v takovém případě číslo iracionální, kdežto levá je číslo celé. Rovnost tedy může nastat, jen když $x = z$ nebo $y = z$.

V prvním případě po dosazení $x = z$ do původní rovnice dostaneme $z - y = \sqrt{3}(z - y)$. Odtud $z = y = x$.

Ve druhém případě, kdy $y = z$, dojdeme analogicky k témuž výsledku.

Závěr. Řešením dané rovnice jsou všechny trojice $(x, y, z) = (k, k, k)$, kde k je libovolné celé číslo.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za pouhé uhodnutí kořenů $x = y = z \in \mathbb{Z}$ a 5 bodů za správný důkaz, že jiná řešení rovnice nemá.