57. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie B

1. Jestliže libovolné prvočíslo vydělíme třiceti, bude zbytkem číslo 1 nebo prvočíslo. Dokažte.

2. Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

společný reálný kořen.

3. V rovině jsou dány dvě rovnoběžky p a q, bod A na přímce p a bod M ležící uvnitř pásu mezi přímkami p a q. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec $ABCD$ tak, aby strana AB ležela na přímce p, strana CD na přímce q a aby úhlopříčka BD procházela bodem M.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

ve čtvrtek 24. ledna 2008

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie B

1. Libovolné prvočíslo p lze napsat ve tvaru $p = 30a + z$, kde a je celé nezáporné a z, $1 \leqq z \leqq 29$, je zbytek při dělení čísla p třiceti (je-li p prvočíslo, můžeme nulový zbytek vyloučit).

Jestliže p je prvočíslo menší než 30, je zřejmě $z = p$ také prvočíslo.

Předpokládejme tedy, že p je prvočíslo větší než 30, takže $a \geqq 1$. Připusťme, že zbytek z není ani číslo 1, ani prvočíslo, a označme q jeho nejmenší prvočíselný dělitel. Zřejmě platí $q^2 \leqq z < 30 < 7^2$, odkud $q < 7$ neboli $q \in \{2, 3, 5\}$. Protože číslo 30 je dělitelné dvěma, třemi i pěti, je dělitelné prvočíslem q, takže i číslo $p = 30a + z$ je prvočíslem q dělitelné. Nemůže to tudíž být prvočíslo.

Jiné řešení. Vyjádřeme číslo p ve tvaru $p = 30a + z$. Kdyby bylo zbytkem z některé z čísel $0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28$, bylo by p sudé a přitom větší než 2, takže by nebylo prvočíslem. Kdyby bylo zbytkem některé z čísel $9, 15, 21, 27$, bylo by p dělitelné třemi a přitom větší než 3 a nemohlo by být prvočíslem. Konečně při zbytku 25 by bylo p dělitelné pěti a přitom větší než 5, takže ani pak by to nebylo prvočíslo.

Stručněji řečeno: Protože každé složené číslo menší než 30 je soudělné s 30, je zbytkem prvočísla p při dělení třiceti jednotka nebo prvočíslo.

Za jakékoli vyloučení všech devatenácti zbytků (složených čísel a nuly) dejte 6 bodů. Za vyjádření čísla p ve tvaru $p = 30a + z$, kde a je celé nezáporné a $z \in \{0, 1, \ldots, 29\}$, udělte 1 bod; 2 body za postřeh, že každé složené číslo menší než 30 je dělitelné dvěma, třemi nebo pěti, a další 3 body za správné dokončení důkazu.

2. Je-li x_0 společný kořen obou rovnic, platí

$$x_0^2 + (3a + b)x_0 + 4a = 0, \quad x_0^2 + (3b + a)x_0 + 4b = 0.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme $(2a - 2b)x_0 + 4(a - b) = 0$, což po úpravě dává $(a - b)(x_0 + 2) = 0$.

Rozebereme dvě možnosti:

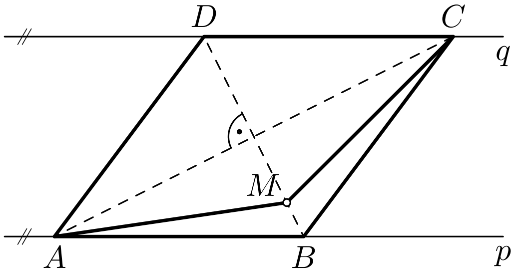
Číslo $x_0 = -2$ je společným kořenem obou rovnic, dosazením do kterékoli z nich dostaneme $4 - 2a - 2b = 0$, tedy $b = 2 - a$. Pro takové b mají obě rovnice při libovolné hodnotě parametru a společný kořen -2.

Jestliže $a = b$, mají obě dané rovnice stejný tvar $x^2 + 4ax + 4a = 0$. Aspoň jeden kořen (samozřejmě společný) existuje, právě když je diskriminant $16a^2 - 16a$ nezáporný, tedy právě když $a \notin (0, 1)$.

Závěr: Dané rovnice mají aspoň jeden společný kořen pro všechny dvojice tvaru $(a, 2 - a)$, kde a je libovolné, a pro všechny dvojice (a, a), kde $a \notin (0, 1)$.

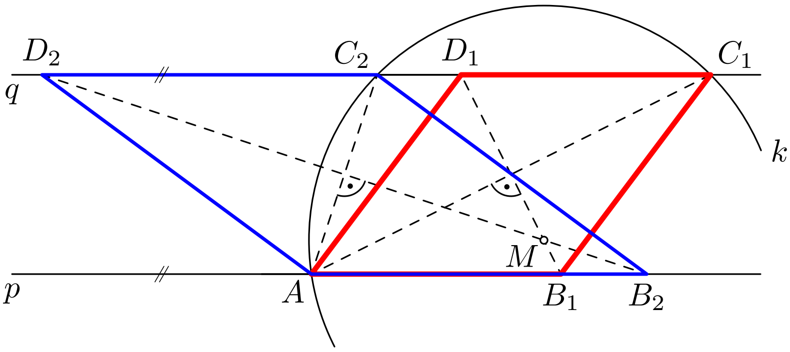
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odvození podmínky $(a - b)(x_0 + 2) = 0$ dejte 2 body, 2 body za správné rozebrání možnosti $a = b$, 2 body za nalezení řešení $b = 2 - a$.

3. Ze shodnosti trojúhelníků ABM a CBM (*sus*) vyplývá $|CM| = |AM|$; bod C proto musí ležet na kružnici se středem M a poloměrem $|AM|$ (obr. 1). Úhlopříčky (koso)čtverce jsou na sebe kolmé, proto body B a D leží na kolmici vedené bodem M na přímku AC.



Obr. 1

Konstrukce: Sestrojíme kružnici k se středem M a poloměrem $|AM|$. Průsečík této kružnice s přímkou q je bod C. Bodem M vedeme kolmici na přímku AC. Její průsečíky s přímkami p a q jsou body B a D (obr. 2). Sestrojený čtyřúhelník má zřejmě všechny požadované vlastnosti.



Obr. 2

Diskuse: Je-li vzdálenost bodu M od přímky q větší než jeho vzdálenost od bodu A, nemá kružnice k s přímkou q společný bod a úloha nemá řešení.

Má-li bod M stejnou vzdálenost od přímky q jako od bodu A, má kružnice k s přímkou q jediný společný bod C. Pokud zároveň bod M neleží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, není přímka AC kolmá na p, proto kolmice vedená bodem M na přímku AC není s přímkou p rovnoběžná a úloha má jedno řešení; pokud ale bod M leží na ose pásu (je to tedy průsečík osy pásu s kolmicí k přímce p vedenou bodem A), nemá úloha řešení.

Je-li vzdálenost bodu M od přímky q menší než jeho vzdálenost od bodu A, protíná kružnice k přímku q ve dvou bodech. Pokud bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, leží jeden z průsečíků na kolmici vedené bodem A na přímku p a úloha má jedno řešení; neleží-li M na ose pásu, má úloha dvě řešení.

Udělte 2 body za sestrojení bodu C, 2 body za nalezení bodů B a D a 2 body za úplnou diskusi. Důkaz správnosti konstrukce je u všech tří uváděných řešení natolik zřejmý, že může chybět v jinak úplných řešeních hodnocených 6 body.

Jiné řešení. Průsečík S úhlopříček (koso)čtverce $ABCD$ musí ležet na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q.

Leží-li bod M na ose pásu, musí platit $S = M$; bod C je potom průsečík přímek AS

a q, B a D jsou průsečíky kolmice k přímce AC vedené bodem M s přímkami p a q. Je-li přitom $AM \perp p$, nemá úloha řešení, jinak má jedno řešení.

Neleží-li M na ose pásu, je úhel ASM pravý. Proto je bod S průsečíkem osy pásu s Thaletovou kružnicí nad průměrem AM. Body C, B, D potom najdeme stejně jako v předchozím řešení. Podle počtu společných bodů osy pásu a Thaletovy kružnice má potom úloha dvě řešení, jedno řešení nebo nemá žádné řešení.

Za poznatek, že bod S leží na ose pásu, udělte 1 bod. Za vyřešení úlohy pro případ, kdy M leží na ose pásu, dejte 2 body (z toho 1 bod za diskusi). Za vyřešení úlohy pro případ, kdy M na ose pásu neleží, dejte 3 body (z toho 1 bod za diskusi).

Jiné řešení. Bod M leží na ose úhlu ADC, proto má od přímek AD a q stejnou vzdálenost. Přímka AD je tedy tečnou kružnice, která má střed M a dotýká se přímky q.

Konstrukce: Sestrojíme kružnici h se středem M, která se dotýká přímky q. Vrchol D hledaného (koso)čtverce je průsečík přímky q s tečnou kružnice h procházející bodem A. Body B a C potom už najdeme snadno.

Diskuse: Má-li bod M od bodu A menší vzdálenost než od přímky q, neprochází bodem A žádná tečna kružnice h a úloha nemá řešení.

Má-li bod M od bodu A stejnou vzdálenost jako od přímky q, leží bod A na kružnici h a prochází jím jedna tečna této kružnice. Pokud přitom bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, je touto tečnou přímka p, která přímku q neprotíná, a úloha nemá řešení. Pokud ale bod M na ose pásu neleží, tečna je s přímkou q různoběžná a úloha má jedno řešení.

Má-li bod M od bodu A větší vzdálenost než od přímky q, existují dvě tečny kružnice h procházející bodem A. Pokud přitom bod M leží na ose pásu, je jednou z tečen přímka p a úloha má jedno řešení; pokud bod M na ose pásu neleží, jsou obě tečny s q různoběžné a úloha má dvě řešení.

Udělte 3 body za sestrojení bodu D, 1 bod za dokončení konstrukce a 2 body za diskusi.