57. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie A

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2, \\ y^2 - z &= x^2, \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

2. Podstavy hranolu tvoří dva shodné konvexní n-úhelníky. Počet v vrcholů tohoto tělesa, počet s jeho stěnových úhlopříček a počet t jeho tělesových úhlopříček tvoří v jistém pořadí první tři členy aritmetické posloupnosti. Pro která n to platí?
(Poznámka: Stěnami hranolu rozumíme boční stěny i podstavy. Tělesová úhlopříčka je úsečka, jež spojuje dva vrcholy hranolu, které neleží v téže stěně.)

3. V rovině je dán úhel XSY a kružnice k o středu S. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k, jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY. Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC.

Klauzurní část školního kola kategorie A se koná

v úterý 4. prosince 2007

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

57. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie A

1. Sečtením všech tří rovnic po zrušení kvadratických členů dostaneme

$$x + y + z = 0. \tag{1}$$

Odtud vyjádříme $z = -x - y$ a dosadíme do první rovnice soustavy. Obdržíme $x^2 - y = (-x - y)^2$, což po úpravě dá rovnici $y(2x + y + 1) = 0$. Rozlišíme proto, který z obou činitelů na její levé straně je roven nule.

V případě $y = 0$ z rovnice (1) obdržíme $z = -x$ a po dosazení y, z do původní soustavy dostaneme pro neznámou x jedinou podmínku $x(x - 1) = 0$, kterou splňuje pouze $x = 0$ a $x = 1$. Jim odpovídají řešení (x, y, z) tvaru $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, -1)$.

V případě, kdy $2x + y + 1 = 0$ neboli $y = -2x - 1$, z (1) máme $z = -x - y = x + 1$. Po dosazení y, z do původní soustavy dostaneme pro neznámou x jedinou podmínku $x(x + 1) = 0$, kterou splňují pouze $x = 0$ a $x = -1$. Jim odpovídají řešení (x, y, z) tvaru $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Závěr: Daná soustava má právě čtyři řešení (x, y, z): trojice $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Jiné řešení. Sečtením dvou prvních rovnic dané soustavy eliminujeme neznámou x a dostaneme rovnici $y^2 - z^2 = y + z$, kterou lze zapsat v součinovém tvaru

$$(y + z)(y - z - 1) = 0. \tag{2}$$

Rozlišíme opět, který ze dvou činitelů v poslední rovnici se rovná nule.

V případě $y + z = 0$ ze třetí rovnice dané soustavy vyjde $x = 0$ a z prvních dvou rovnic po dosazení $x = 0$ a $z = -y$ dostaneme pro neznámou y jedinou podmínku $y(y + 1) = 0$, tedy $y = 0$ nebo $y = -1$. Odpovídající řešení (x, y, z) jsou $(0, 0, 0)$ a $(0, -1, 1)$.

V případě, kdy $y - z - 1 = 0$ neboli $z = y - 1$, obdržíme ze třetí rovnice soustavy $x = z^2 - y^2 = (y - 1)^2 - y^2 = 1 - 2y$. Dosazením x, z dostaneme pro neznámou y jedinou podmínku $y(y - 1) = 0$, tedy $y = 0$ nebo $y = 1$. Odpovídající řešení (x, y, z) jsou $(1, 0, -1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Odvození rovnice (1) nebo aspoň jedné ze tří analogických rovnic v součinovém tvaru (2) oceňte 2 body.

2. Každý n-boký hranol má právě n vrcholů v každé ze svých podstav, takže platí $v = 2n$. Z každého vrcholu vychází $n - 3$ úhlopříček ležících v podstavě a dvě úhlopříčky ležící v bočních stěnách, celkem je to $n - 1$ stěnových úhlopříček. Z $2n$ vrcholů tedy vychází $2n(n - 1)$ stěnových úhlopříček, každá z nich je však započítána dvakrát, proto $s = n(n - 1)$. Podobně určíme počet t tělesových úhlopříček: z každého vrcholu jich vychází $n - 3$ (do všech vrcholů druhé podstavy s výjimkou těch tří vrcholů, se kterými je daný vrchol spojen hranou nebo úhlopříčkou v boční stěně), proto $t = 2n(n - 3) : 2 = n(n - 3)$.

Hledáme ta celá $n \geqq 3$, pro něž čísla

$$v = 2n, \quad s = n(n - 1) \quad \text{a} \quad t = n(n - 3)$$

tvoří ve vhodném pořadí trojici x, y, z s vlastností $y - x = z - y$ neboli $y = \frac{1}{2}(x + z)$. Snadným dosazením zjistíme, že pro $n = 3$ jde o nevyhovující trojici čísel 6, 6, 0, zatímco pro $n = 4$ vychází vyhovující trojice 8, 12, 4 (platí $8 = \frac{1}{2}(4 + 12)$). Pro libovolné $n \geqq 5$ máme $n - 1 > n - 3 \geqq 2$, odkud po násobení číslem n dostaneme $s > t \geqq v$, takže požadovaná rovnost s aritmetickým průměrem musí být tvaru $t = \frac{1}{2}(v + s)$. Po dosazení dostáváme rovnici

$$n(n-3) = \frac{2n + n(n-1)}{2}$$

s jediným přípustným kořenem $n = 7$ (kořen $n = 0$ nemá reálný smysl).

Závěr: Vyhovují jedině $n = 4$ a $n = 7$.

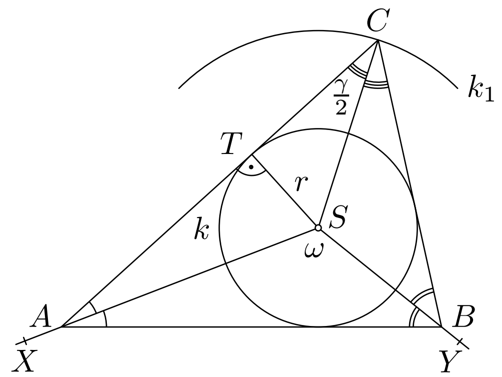
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vyjádření počtu s a 2 body za vyjádření počtu t (v závislosti na proměnné n), další body podle úplnosti diskuse, v jakém pořadí mohou čísla v, s, t tvořit aritmetickou posloupnost. Pokud řešitel opomene řešení $n = 4$ (např. prohlásí za zřejmé nerovnosti $s > t > v$), udělte nejvýše 5 bodů.

3. Označme r poloměr dané kružnice k a ω velikost daného (konvexního) úhlu XSY. V libovolném vyhovujícím trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem vnitřní úhly. V trojúhelníku ABS platí (obr. 1)

$$\omega = |\sphericalangle ASB| = 180^\circ - |\sphericalangle SAB| - |\sphericalangle SBA| = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

odkud plyne, že hledaná množina je prázdná, pokud $\omega \leqq 90^\circ$ nebo $\omega = 180^\circ$, a že všechny vyhovující trojúhelníky ABC mají vnitřní úhel γ, pro jehož velikost platí

$$\gamma = 2\omega - 180^\circ.$$



Obr. 1

Z pravoúhlého trojúhelníku CST, kde T je bod dotyku kružnice k se stranou AC (obr. 1), vyjádříme délku přepony SC vztahem

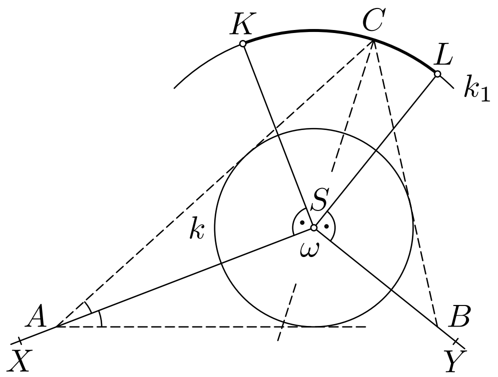
$$|SC| = \frac{|ST|}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r}{\sin(\omega - 90^\circ)}.$$

Bod C proto leží na kružnici k_1 o středu S a poloměru $r_1 = r/\sin(\omega - 90^\circ)$.

Stejně jako úhel ASB jsou i úhly ASC a BSC (neboli úhly XSC a YSC) tupé, neboť

$$|\sphericalangle ASC| = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BSC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Dohromady tak dostáváme, že bod C je vnitřním bodem oblouku KL kružnice k_1, který leží vně daného úhlu XSY a jehož krajní body K, L jsou určeny pravými úhly XSK a YSL (obr. 2).



Obr. 2

Vybereme-li naopak libovolný vnitřní bod C oblouku KL, polopřímky SX, SY a SC rozdělí rovinu na tři tupé úhly, přičemž polopřímka CS oddělí body X a Y. Z rovnosti $|SC| = r_1$ plyne, že tečna z bodu C ke kružnici k sestrojená v polorovině CSX svírá s polopřímkou CS ostrý úhel $\omega - 90^\circ$, takže protne polopřímku SX v bodě, který označíme A. Analogicky tečna z bodu C ke kružnici k sestrojená v polorovině CSY protne polopřímku SY v bodě, který označíme B.

Zvolme nyní hodnoty α, β, γ tak, aby $\omega - 90^\circ = \frac{1}{2}\gamma$, $|\sphericalangle CSK| = \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle CSL| = \frac{1}{2}\alpha$, potom z plného úhlu u vrcholu S vyplývá

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 180^\circ - \omega = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \quad \text{neboli } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Jak snadno spočteme, tečna z nalezeného bodu A ke kružnici k souměrně sdružená s tečnou AC podle přímky SX protíná polopřímku CS pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \alpha$, a podobně vyjde, že analogická tečna z nalezeného bodu B protne tutéž polopřímku pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \beta$. Součet obou uvedených úhlů je však 180°, proto jsou obě tečny ke kružnici k rovnoběžné, a tedy totožné (oba příslušné body dotyku musejí totiž ležet uvnitř konvexního úhlu XSY). Nalezený trojúhelník ABC má proto požadované vlastnosti.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za určení úhlu γ udělte 1 bod, další 2 body za určení poloměru $r_1 = |SC|$ kružnice k_1 a 2 body za vymezení jejího oblouku KL. Chybí-li závěrečné zdůvodnění, že každý vnitřní bod C oblouku KL je vrcholem vyhovujícího trojúhelníku ABC, může řešitel získat nejvýše 5 bodů.