57. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Nechť n je dané přirozené číslo větší než 1. Najděte všechny dvojice celých čísel s a t, pro které rovnice

$$x^n + sx - 2\,007 = 0, \qquad x^n + tx - 2\,008 = 0$$

mají v oboru reálných čísel aspoň jeden společný kořen.

2. V rovině jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 o různých poloměrech, které mají vnější dotyk v bodě T. Uvažujme libovolné dva body $A \in k_1$ a $B \in k_2$, oba různé od bodu T a vybrané tak, že úhel ATB je pravý.

a) Dokažte, že všechny uvažované přímky AB procházejí týmž bodem.

b) Najděte množinu středů všech takových úseček AB.

3. Pole tabulky $n \times n$, kde $n \geqq 3$, jsou střídavě černá a bílá jako na obyčejné šachovnici, přičemž pole v levém horním rohu je černé. Bílá pole budeme barvit načerno následujícím postupem. V jednom kroku vybereme libovolný obdélník 2×3 nebo 3×2, ve kterém jsou ještě tři bílá pole, a tato tři pole začerníme. Pro která n můžeme po určitém počtu kroků začernit celou tabulku?

4. Nechť M je libovolný vnitřní bod polokružnice k se středem S a průměrem AB. Označme k_A kružnici vepsanou kruhové výseči ASM a k_B kružnici vepsanou kruhové výseči BSM. Dokažte, že kružnice k_A a k_B leží v opačných polorovinách vyťatých některou přímkou kolmou k úsečce AB.

(Kružnice vepsaná kruhové výseči se dotýká obou ramen i hraničního oblouku.)

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 22. ledna 2008

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řešení úloh krajského kola kategorie A

1. Vyjádřením členu x^n z obou rovnic

$$x^n = 2\,007 - sx, \quad x^n = 2\,008 - tx$$

dostaneme po porovnání rovnici $2\,007 - sx = 2\,008 - tx$, podle které společný kořen x může existovat jen v případě $s \neq t$ a musí být tvaru $x = 1/(t-s)$. Takové x je skutečně kořenem obou původních rovnic, právě když je kořenem jedné z nich; po dosazení např. do první rovnice dostaneme po úpravě ekvivalentní podmínku

$$(t-s)^{n-1} \cdot \bigl(s - 2\,007(t-s)\bigr) = -1.$$

Protože oba činitelé na levé straně jsou celá čísla, musí to být čísla 1 a -1 v některém pořadí, takže podle prvního činitele musí rovněž platit $t - s = \pm 1$.

a) Je-li $t - s = 1$, pak nalezená podmínka má tvar $s - 2\,007(t-s) = -1$. Dvojice rovnic pro neznámé hodnoty s, t

$$t - s = 1, \quad s - 2\,007(t-s) = -1$$

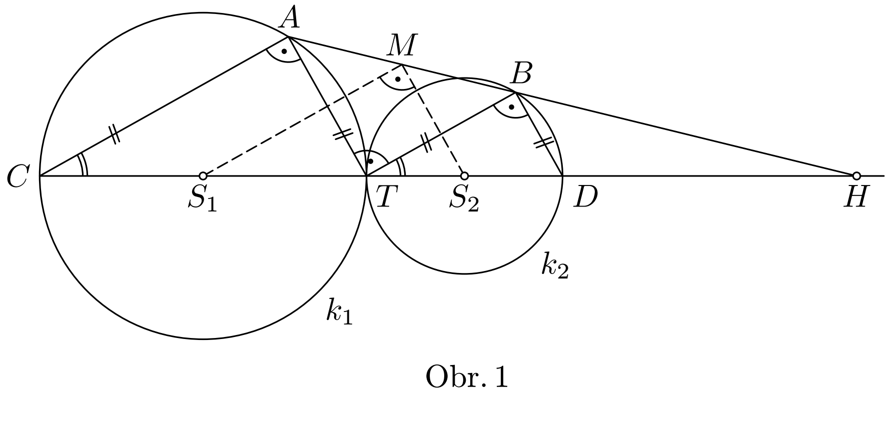
má jediné řešení $s = 2\,006$ a $t = 2\,007$. (Společný kořen je $x = 1$.)

b) Je-li $t - s = -1$, pak $s - 2\,007(t-s) = (-1)^n$, odkud podobně jako v případě a) nalezneme řešení $s = (-1)^n - 2\,007$ a $t = (-1)^n - 2\,008$. (Společný kořen je $x = -1$.)

Závěr: Podmínce úlohy vyhovují právě dvě dvojice $(s,t) = (2\,006, 2\,007)$ a $(s,t) = \bigl((-1)^n - 2\,007, (-1)^n - 2\,008\bigr)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Odvození vzorce $x = 1/(t-s)$ oceňte 2 body, následné zjištění $t - s = \pm 1$ rovněž 2 body a konečně po 1 bodu udělte za určení dvojic (s,t) v jednotlivých případech a) a b). Společný kořen x je dle zadání *reálné* číslo; pokud řešitel nezdůvodní, že je to číslo *celé*, pak za jinak úplné řešení založené na úvaze, že číslo x jakožto společný dělitel čísel 2 007 a 2 008 musí být rovno ± 1, udělte pouze 1 bod, stejně jako když řešitel obě dvojice (s,t) nějak jinak uhodne (za pouze jednu z nich žádný bod nepřidělujte). Posuďte, zda v protokolech aspirujících na úplnost nechybí zkouška (v našem výkladu není nutná díky zmíněné ekvivalenci), její absenci penalizujte ztrátou 1 bodu.

2. a) Na obr. 1 jsou zakresleny průměry CT, DT daných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, resp. $k_2(S_2, r_2)$ a jedna dvojice vyhovujících bodů A, B. Protože středná S_1S_2 a na ni kolmá



Obr. 1

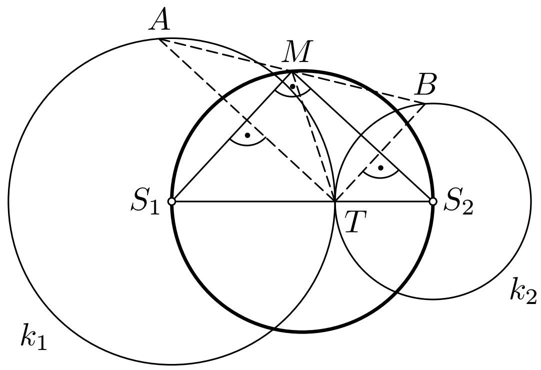
společná tečna obou kružnic v bodě T rozdělují rovinu na čtyři kvadranty, je zřejmé, že oba body A, B, které s bodem T tvoří pravý úhel (a musejí proto ležet v sousedních kvadrantech), leží v téže polorovině určené přímkou S_1S_2.

Z Thaletovy věty plyne, že $CA \perp AT \perp TB \perp BD$, takže $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$. Proto podle věty uu platí $\Delta ACT \sim \Delta BTD$, odkud $|AC| : |BT| = |CT| : |TD| = r_1 : r_2$. Je-li např. $r_1 > r_2$, pak přímka AB protne polopřímku CT v takovém bodě H, že platí $|CH| : |TH| = r_1 : r_2$ (z podobných trojúhelníků ACH a BTH). Díky této úměře je bod H společný všem uvažovaným přímkám AB. Stejnou úvahu provedeme i v případě $r_1 < r_2$ (možnost $r_1 = r_2$ je zadáním úlohy vyloučena). Tím je tvrzení a) dokázáno.

Dodejme, že po zjištěních $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$ jsme se mohli rovnou odvolat na školské poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic. V případě $r_1 \neq r_2$ totiž vždy existuje vnější střed H stejnolehlosti kružnic k_1, k_2, v níž tětivy AC, AT kružnice k_1 musí přejít v rovnoběžné tětivy BT, resp. BD kružnice k_2, neboť krajní body C, T prvních dvou tětiv přejdou v krajní body T, resp. D druhých dvou tětiv. Proto bod A přejde do bodu B, takže přímka AB prochází vnějším středem H.

b) Označme M střed úsečky AB (obr. 1) a využijme znovu vztahy $CA \perp AT \perp TB \perp BD$. Úsečky S_1M a S_2M jsou střední příčky lichoběžníků $CTBA$, resp. $DTAB$, takže platí $S_1M \parallel TB \perp AT \parallel S_2M$, tedy úhel S_1MS_2 je pravý. Bod M proto leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2 a je různý od bodů S_1 a S_2 (úsečka AB střednou S_1S_2 neprotne).

Obráceně, je-li M libovolný bod nalezené Thaletovy kružnice různý od S_1, S_2 a sestrojíme-li tětivu TA kružnice k_1 kolmou k úsečce S_1M a tětivu TB kružnice k_2 kolmou k úsečce S_2M (obr. 2), bude úhel ATB stejně jako úhel S_1MS_2 pravý a přímky S_1M, S_2M budou osami úseček TA, resp. TB. Budou tudíž platit rovnosti $|MA| = |MT| = |MB|$, takže bod M bude středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku TAB, bude tedy středem jeho přepony AB.



Obr. 2

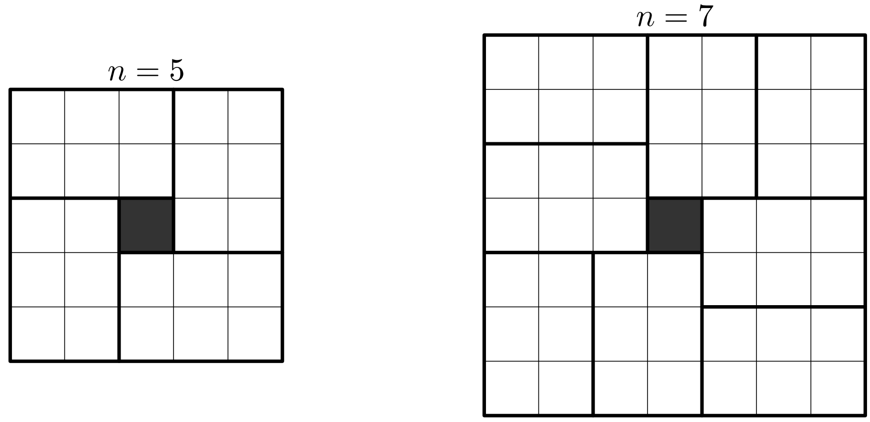
Hledanou množinou středů úseček AB je kružnice nad průměrem S_1S_2 s vyloučenými body S_1, S_2.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body za každou z obou částí a) a b). V části a) udělte 1 bod za odvození vztahů $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$, 2 body za nalezení společného bodu H všech přímek AB (řešitelé se mohou odvolat na poznatky o stejnolehlosti kružnic). V části b) udělte 2 body za odvození poznatku, že střed M leží na objevené Thaletově kružnici a 1 bod za vysvětlení, že každý bod této kružnice (s výjimkou bodů S_1, S_2) je středem některé vyhovující úsečky AB.

3. V jednom kroku začerníme právě tři pole, proto musí být celkový počet bílých polí dané tabulky dělitelný třemi. Pro sudé n je tento počet roven $\frac{1}{2}n^2$ (černých i bílých polí je totiž stejný počet), pro liché n je počet bílých polí roven $\frac{1}{2}(n^2-1)$ (černých polí je o 1 více než bílých). Číslo $\frac{1}{2}n^2$, resp. $\frac{1}{2}(n^2-1)$ je násobkem tří, právě když $n = 6k$, resp. $n = 6k \pm 1$ pro vhodné celé k.

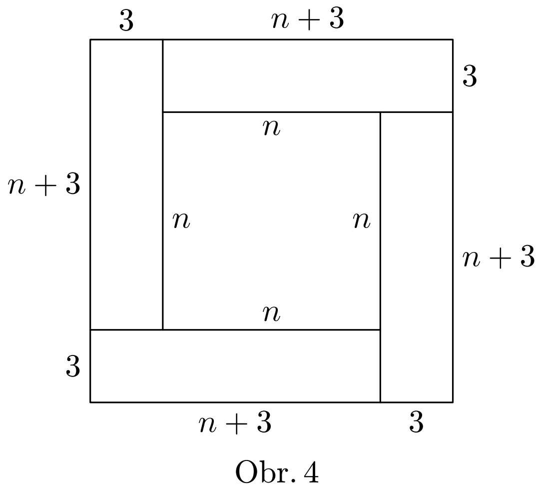
Nyní ukážeme, že pro všechna čísla n uvedených tvarů je začernění celé tabulky možné. Pro $n = 6k$ je to nasnadě, neboť celou tabulku můžeme rozdělit na obdélníky 2×3 a v každém z nich provést začernění. Všimněme si, že stejný postup lze uplatnit i v každém obdélníku, jehož jeden rozměr je dělitelný dvěma a druhý třemi.

Pro čísla $n = 6k \pm 1$ popíšeme začernění pomocí matematické indukce. Pro nejmenší čísla $n = 5$ a $n = 7$ vidíte na obr. 3 obdélníky 2×3 a 3×2 v příslušných tabulkách, ve kterých



Obr. 3

provedeme začernění (pro lepší přehled je z původního šachovnicového obarvení začerněno jen středové, obdélníky nepokryté pole). Ve druhém indukčním kroku stačí ukázat, že lze-li začernit celou tabulku $n\times n$ pro některé liché n, lze udělat totéž i s tabulkou $(n+6)\times(n+6)$. Postup je jasný z obr. 4: nejprve začerníme „středovou“ tabulku $n \times n$ (ta má černá rohová pole) a pak začerníme každý ze čtyř vyznačených obdélníků o rozměrech $(n + 3) \times 3$ nebo $3 \times (n + 3)$. (To je možné podle závěru předchozího odstavce, neboť pro liché n je číslo $n + 3$ dělitelné dvěma.)

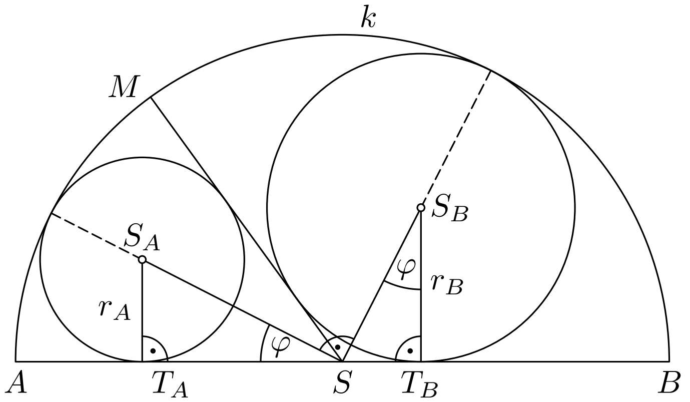


Obr. 4

Závěr: Celou tabulku můžeme začernit, právě když je číslo n tvaru $6k$, $6k+1$ nebo $6k-1$ pro nějaké celé k.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za úvahu o dělitelnosti třemi celkového počtu bílých polí a další 2 body, pokud je úvaha dovedena až k nutným tvarům $n=6k$, $n=6k+1$, $n=6k+5$, takže jsou vyloučena všechna $n=6k+2$, $n=6k+3$ a $n=6k+4$. Za popis začernění pro jednotlivé ze tří skupin možných čísel n udělte po 1 bodu. Je-li u druhé a třetí skupiny popsáno pouze začernění pro první hodnoty $n=5$ a $n=7$ (případně i pro konečný počet dalších $n=11$, $n=13,\dots$), může řešitel za celou úlohu získat nejvýše 4 body.

4. Podle obr. 5 zaveďme označení $k_A(S_A,r_A)$, $k_B(S_B,r_B)$, $T_A\in AB\cap k_A$, $T_B\in AB\cap\cap k_B$, $\varphi=\frac{1}{2}|\sphericalangle ASM|$. Protože polopřímky SS_A, SS_B jsou osami vedlejších úhlů ASM a BSM, je úhel S_ASS_B pravý a platí $\varphi=|\sphericalangle ASS_A|=|\sphericalangle SS_BT_B|$.



Obr. 5

Přímka s požadovanou vlastností existuje, právě když kolmé průměty kružnic k_A, k_B na přímku AB mají nejvýše jeden společný bod. Těmito průměty jsou úsečky se středy T_A, T_B a jejich délky jsou $2r_A$ a $2r_B$, takže podmínka z předchozí věty je ekvivalentní nerovnosti

$$|T_AT_B|\geqq r_A+r_B. \tag{1}$$

Označme ještě r poloměr polokružnice k. Pak $|SS_A|=r-r_A$, $|SS_B|=r-r_B$ a z pravoúhlých trojúhelníků S_AST_A, S_BST_B plynou vyjádření

$$\begin{aligned} r_A&=(r-r_A)\sin\varphi, & |T_AS|&=(r-r_A)\cos\varphi,\\ r_B&=(r-r_B)\cos\varphi, & |T_BS|&=(r-r_B)\sin\varphi, \end{aligned}$$

z nichž snadným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} r_A&=\frac{r\sin\varphi}{1+\sin\varphi}, & |T_AS|&=\frac{r\cos\varphi}{1+\sin\varphi},\\ r_B&=\frac{r\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, & |T_BS|&=\frac{r\sin\varphi}{1+\cos\varphi}. \end{aligned}$$

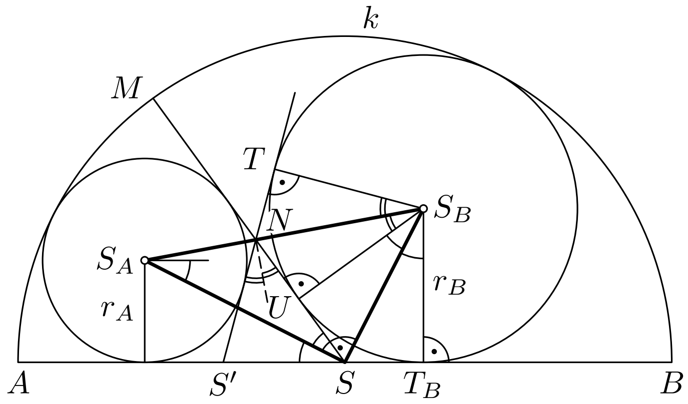
Protože $|T_AT_B| = |T_AS| + |T_BS|$, můžeme čtyři poslední vztahy dosadit do zkoumané nerovnosti (1) a tu dále ekvivalentně upravovat:

$$\begin{aligned} \frac{r\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{r\sin\varphi}{1+\cos\varphi} &\geqq \frac{r\sin\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{r\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, \\ \cos\varphi(1+\cos\varphi) + \sin\varphi(1+\sin\varphi) &\geqq \sin\varphi(1+\cos\varphi) + \cos\varphi(1+\sin\varphi), \\ 1 &\geqq 2\sin\varphi\cos\varphi, \\ \sin 2\varphi &\leqq 1. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, takže platí i nerovnost (1) a úloha je vyřešena.

Jiné řešení. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že pro poloměry obou kružnic platí $r_A < r_B$ (pro shodné kružnice k_A, k_B je tvrzení úlohy triviální), což je ekvivalentní nerovnosti $|SS_A| > |SS_B|$. Protože polopřímky SS_A, SS_B jsou osami vedlejších úhlů ASM a BSM, je úhel S_ASS_B pravý (obr. 6). V pravoúhlém trojúhelníku S_ASS_B pro úhel proti delší odvěsně S_AS tudíž platí $|\sphericalangle S_AS_BS| > 45°$ a naopak $|\sphericalangle S_BS_AS| < 45°$. To navíc znamená, že i úhel S_ASA, který je menší než úhel S_BS_AS (neboť $r_A < r_B$), je menší než $45°$, neboli úhel ASM je ostrý.

Označme N průsečík středné S_AS_B obou kružnic s tečnou SM a sestrojme druhou vnitřní společnou tečnu $S'N$ (obr. 6), kde S' je bod, v němž zmíněná tečna protne úsečku AS (obě tečny jsou souměrně sdruženy podle středné S_AS_B). Její dotykový bod s kružnicí k_B označme T a bod dotyku téže kružnice s první tečnou SM označme U.



Obr. 6

Zaměřme se teď na trojúhelník $S'SN$, který má u vrcholu S úhel shodný s úhlem ASM, jenž je, jak jsme již zdůvodnili, ostrý. Ukážeme nyní, že také úhel u vrcholu S' je ostrý. Ze zřejmé shodnosti dvojic úhlů $S'NS$, TS_BU a $S'SN$, T_BS_BU (jejich ramena jsou navzájem kolmá) pro součet úhlů u vrcholu S a N zkoumaného trojúhelníku $S'SN$ totiž plyne

$$|\sphericalangle S'NS| + |\sphericalangle S'SN| = |\sphericalangle TS_BU| + |\sphericalangle T_BS_BU| = 2|\sphericalangle S_AS_BS| > 90°.$$

To znamená, že přímka obsahující výšku z vrcholu N v trojúhelníku $S'SN$ má požadovanou vlastnost: odděluje obě kružnice k_A, k_B a je kolmá na AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Sestavení nerovnosti (1) oceňte 2 body. Podobně oceňte myšlenku, že kolmice z bodu N na AB má požadovanou vlastnost.