56. ročník matematické olympiády

Úlohy klauzurní části školního kola kategorie C

1. Určete počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která jsou dělitelná šesti a v jejichž zápisu se vyskytují právě dvě jedničky.

2. Kružnice k se středem S je opsána pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$. Tečna v bodě A ke kružnici k protne přímku SB v bodě K a tečna v bodě B protne přímku SC v bodě L. Dokažte, že čtyřúhelníku $KLCB$ lze opsat kružnici, která je shodná s kružnicí k.

3. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, jejichž rozdíl $a - b$ je pátou mocninou některého prvočísla a pro něž platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$.

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

ve čtvrtek 25. ledna 2007

tak, aby začala dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

56. ročník matematické olympiády

Řešení úloh klauzurní části školního kola kategorie C

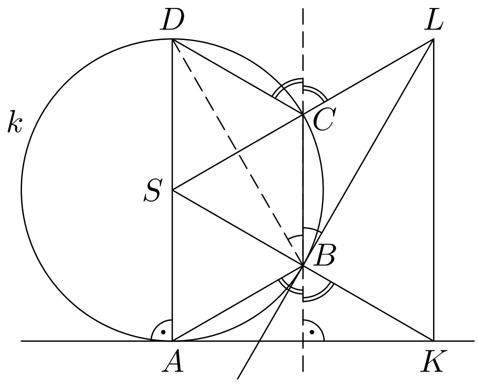
1. Aby číslo bylo dělitelné šesti, musí být sudé a mít ciferný součet dělitelný třemi. Označme tedy b číslici na místě jednotek (ta musí být sudá, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$) a a tu číslici, která je spolu s číslicemi 1, 1 ($a \neq 1$) na prvních třech místech čtyřmístného čísla, jež splňuje požadavky úlohy.

Aby byl součet číslic $a + 1 + 1 + b$ takového čísla dělitelný třemi, musí číslo $a + b$ dávat při dělení třemi zbytek 1. Pro $b \in \{0, 6\}$ tak máme pro a možnosti $a \in \{4, 7\}$ ($a \neq 1$), pro $b \in \{2, 8\}$ je $a \in \{2, 5, 8\}$ a konečně pro $b = 4$ je $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Pro každé zvolené b a odpovídající $a \neq 0$ jsou zřejmě tři možnosti, jak číslice 1, 1 a a na prvních třech místech uspořádat, to je dohromady $(2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3) \cdot 3 = 39$ možností, pro $a = 0$ (když $b = 4$) pak jsou jen dvě možnosti (číslice nula nemůže být první číslicí čtyřmístného čísla).

Celkem existuje 41 čtyřmístných přirozených čísel, jež splňují podmínky úlohy.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za využití poznatku, že poslední číslice musí být sudá. Pokud ovšem někdo rozebere všech 81 případů zbývajících dvou číslic a k nim správně určí počet vyhovujících čísel, má rovněž nárok na 6 bodů. Při popsání efektivního postupu za případné aritmetické chyby při určení konečného počtu nestrhávejte více než 2 body.

2. Tečna ke kružnici k v bodě A je kolmá na průměr AD, a tedy i na stranu BC daného šestiúhelníku (obr. 1). Zároveň přímky SB a AB svírají s BC šedesátistupňový úhel, takže jsou souměrně sdružené podle osy BC. Bod K je tudíž souměrně sdružený s bodem A podle osy BC.



Obr. 1

Podobně tečna BL je kolmá na BS, takže svírá s přímkou BC úhel 30° stejně jako přímka BD. Přímka BL je tudíž souměrně sdružená s přímkou BD podle osy BC. Také přímky SC a CD jsou souměrně sdružené dle osy BC, takže bod L je podle téže osy souměrně sdružený s bodem D.

Dostali jsem tak, že čtyřúhelník $KLCB$ je souměrně sdružený s lichoběžníkem $ADCB$, kterému je opsána kružnice k. Vrcholy čtyřúhelníku $KLCB$ proto leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí k podle osy BC. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za rozhodnutí řešitele dokazovat hypotézu o shodnosti čtyřúhelníků $ABCD$ a $KLCB$. Při využití osové souměrnosti udělte 2 body za důkaz sdruženosti bodů A,

K a 2 body za sdruženost bodů D, L. Místo souměrnosti lze dokazovat shodnost příslušných trojúhelníků. Lze také nejdříve sestrojit obrazy A', D' vrcholů A a D v souměrnosti podle osy BC a pak ukázat, že $A' = K$ a $D' = L$.

3. Z rovnosti $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$ plyne rovnost $a - b = 4\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$. Protože $a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$, dostáváme po vydělení kladným číslem $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rovnost

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4, \tag{1}$$

neboli

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} + 4. \tag{2}$$

Jejím umocněním vyjde $a = b + 16 + 8\sqrt{b}$. Protože číslo $r = 8\sqrt{b}$ musí být celé, je $\sqrt{b}$ racionální odmocnina přirozeného čísla, takže $b = n^2$ pro vhodné přirozené číslo n. Z rovnosti (2) tak máme $a = (n + 4)^2$ a $a - b = (n + 4)^2 - n^2 = 2^3(n + 2)$. Číslo $a - b$ je tudíž pátou mocninou prvočísla, jen když $n + 2 = 2^2$ neboli $n = 2$.

Jedinou vyhovující dvojicí (a, b) je dvojice $(36, 4)$.

Poznámka. Když si po odvození vztahu (1) uvědomíme, že v závorce na pravé straně rovnosti $a - b = 4\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$ je kladné racionální, a tedy přirozené číslo, vidíme, že musí platit $a - b = 2^5$. Pro odmocniny $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ tak dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 8, \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= 4, \end{aligned}$$

jejichž sečtením vyjde $\sqrt{a} = 6$ a odečtením $\sqrt{b} = 2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Poznatek, že odmocnina z přirozeného čísla je buď iracionální, nebo číslo přirozené, není nutno dokazovat (viz též první pomocnou úlohu k 1. úloze domácího kola).