Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici*

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

Řešení. Rovnici řešíme jako kvadratickou s neznámou a a parametrem b. Její diskriminant je

$$D = (7b + 5)^2 - 4(6b^2 + 4b + 3) = 25b^2 + 54b + 13$$

a kořeny

$$a_{1,2} = \frac{-7b - 5 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Jsou-li a i b celá čísla, musí být i $\sqrt{D} = \pm(2a + 7b + 5)$ celé číslo. Můžeme tedy psát

$$D = 25b^2 + 54b + 13 = c^2,$$

kde c je celé nezáporné. Rovnici

$$25b^2 + 54b + 13 - c^2 = 0$$

opět řešíme jako kvadratickou. Její kořeny jsou

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 25 \cdot 13 + 25c^2}}{25}.$$

Jsou-li b a c celá čísla, musí být $\sqrt{404 + 25c^2}$ druhou mocninou nějakého celého nezáporného čísla d. Pro celá nezáporná čísla c, d tedy platí $d^2 - 25c^2 = 404$ čili

$$(d + 5c)(d - 5c) = 404.$$

Rozdíl $(d + 5c) - (d - 5c) = 10c$ je sudý, takže čísla $d + 5c$ a $d - 5c$ mají stejnou paritu. Navíc pro nezáporné c je $d + 5c \geqq d - 5c$ a $d + 5c \geqq 0$, takže z rozkladů čísla 404 na součin dvou celých čísel vyhovuje jediný, a to

$$d + 5c = 202, \qquad d - 5c = 2.$$

Odtud $d = 102$, $c = 20$. Z kořenů

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm d}{25}$$

je celým číslem jenom $b = 3$. Potom

$$a_{1,2} = \frac{-7b - 5 \pm c}{2},$$

tedy $a_1 = -3$ a $a_2 = -23$.

Dané rovnici vyhovují dvě dvojice čísel (a, b), a to $(-3, 3)$ a $(-23, 3)$.

Jiné řešení. Trojčlen $a^2 + 7ab + 6b^2 = (a + b)(a + 6b)$ se dá rozložit na součin. Pokusme se na součin rozložit i výraz $a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c$, kde c je vhodná konstanta. Rozklad bude mít tvar

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c = (a + b + x)(a + 6b + y).$$

Po roznásobení pravé strany a porovnání koeficientů u a a b dostaneme

$$x + y = 5, \quad 6x + y = 4,$$

neboli

$$x = -\frac{1}{5}, \quad y = \frac{26}{5},$$

takže vyjde

$$c = xy = -\frac{26}{25}.$$

Danou rovnici tak můžeme postupně upravit na tvar

$$\begin{aligned} a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b - \frac{26}{25} &= -3 - \frac{26}{25}, \\ \left(a + b - \frac{1}{5}\right)\left(a + 6b + \frac{26}{5}\right) &= -\frac{101}{25}, \\ (5a + 5b - 1)(5a + 30b + 26) &= -101. \end{aligned}$$

Protože $5a + 5b - 1 \equiv -1 \bmod 5$ a $5a + 30b + 26 \equiv 1 \bmod 5$, vyhovují ze čtyř vyjádření čísla -101 ve tvaru součinu dvou celých čísel jen následující dvě:

$5a + 5b - 1 = -1$, $5a + 30b + 26 = 101$, a tedy $a = -3$, $b = 3$;

$5a + 5b - 1 = -101$, $5a + 30b + 26 = 1$, a tedy $a = -23$, $b = 3$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V množině celých čísel vyřešte rovnici $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 7x - 6y - 11 = 0$. [$x = 4 - 3n^2$, $y = 3 + n - 2n^2$, $n \in \mathbb{Z}$]
2. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $2x^2 - 4xy + 3y^2 - x - 2y - 19 = 0$. [$x = 7$, $y = 6$; $x = 7$, $y = 4$; $x = 2$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 2$; $x = -2$, $y = -3$; $x = -2$, $y = 1$]
3. V množině celých čísel vyřešte rovnici $\frac{2x+1}{y} + \frac{3y-1}{x} = 5$. [$x = y = n$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$; $x = 3n - 2$, $y = 2n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$]
4. Najděte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že součet $a + b$ je kořenem rovnice $x^2 + ax + b = 0$. [$a = b = 0$; $a = 0$, $b = -1$; $a = -6$, $b = 8$; $a = -6$, $b = 9$; 55–A–II–1]

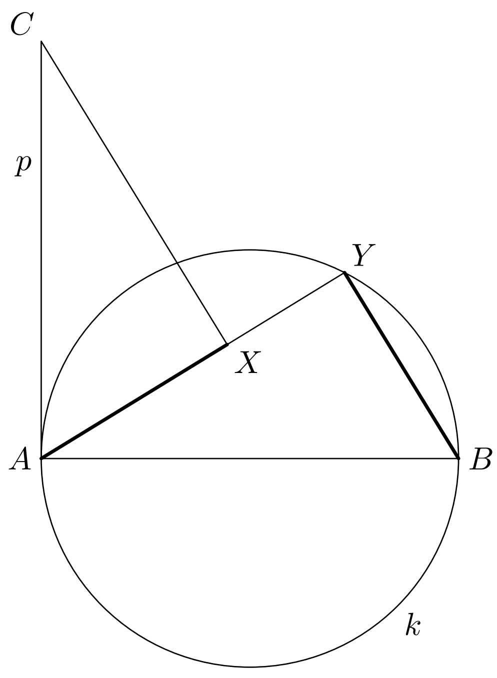
2. *Je dána kružnice k s průměrem AB. K libovolnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, sestrojme na polopřímce AY bod X, pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X.*

Řešení. Jestliže $Y = B$, potom $X = A$.

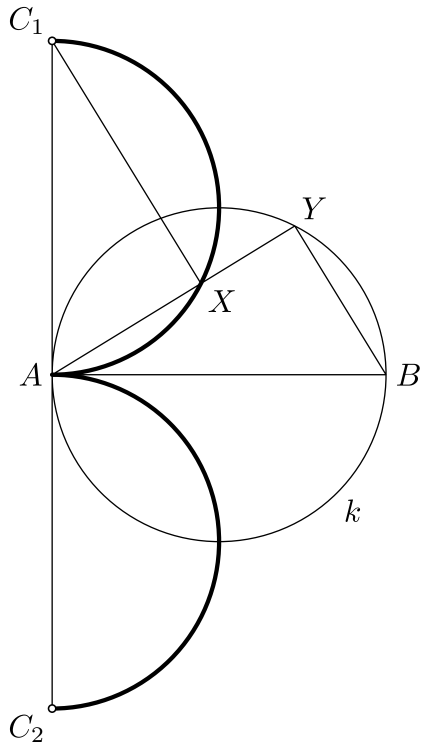
Nechť $Y \neq B$. Označme p přímku procházející bodem A a kolmou na AB a C ten bod přímky p ležící v polorovině ABY, pro nějž platí $|AC| = |AB|$ (obr. 1). Podle zadání platí $|AX| = |BY|$. Úhel AYB je podle Thaletovy věty pravý, proto $|\sphericalangle ABY| = 90° - |\sphericalangle YAB| = |\sphericalangle CAX|$. Trojúhelníky ABY a CAX jsou tedy shodné podle věty *sus*. Odtud vyplývá, že $|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle AYB| = 90°$. Bod X proto leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem AC.

Nechť naopak X je libovolný vnitřní bod této půlkružnice a Y průsečík přímky AX s kružnicí k ($Y \neq A$). Trojúhelníky CAX a ABY jsou shodné podle věty *usu*, a proto $|AX| = |BY|$. Bod X tedy patří do hledané množiny.

Hledanou množinou všech bodů X je sjednocení dvou půlkružnic nad průměry AC_1 a AC_2 ležících v téže polorovině jako bod B; C_1 a C_2 jsou body ležící na kolmici vedené bodem A k přímce AB, přičemž $|AC_1| = |AC_2| = |AB|$ (obr. 2). Bod A do hledané množiny patří, body C_1 a C_2 nikoliv.



Obr. 1



Obr. 2

Návodné a doplňující úlohy:

1. Uvnitř strany BC čtverce $ABCD$ zvolme libovolně bod X. Označme P, Q paty kolmic z bodů B a D na přímku AX. Dokažte, že trojúhelníky ABP a DAQ jsou shodné.
2. Je dán obdélník $ABCD$. Dokažte, že průsečík P kružnic sestrojených nad průměry AB a AD ($P \neq A$) leží na úsečce BD.

3. *Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že každá k-prvková množina trojmístných po dvou nesoudělných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.*

Řešení. Ke konstrukci množiny po dvou nesoudělných trojmístných složených čísel s velkým počtem prvků můžeme využít toho, že mocniny dvou různých prvočísel jsou nesoudělné. Množina

$$\{2^7, 3^5, 5^3, 7^3, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$$

obsahuje 11 po dvou nesoudělných trojmístných čísel a není v ní žádné prvočíslo. Pro další prvočíslo 37 už platí $37^2 > 1\,000$, takže každé složené trojmístné číslo je dělitelné aspoň jedním prvočíslem menším než 37.

Dokážeme, že každá aspoň dvanáctiprvková množina po dvou nesoudělných trojmístných čísel už obsahuje prvočíslo. Množinu všech složených trojmístných čísel lze rozdělit na 11 podmnožin A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17}, A_{19}, A_{23}, A_{29}, A_{31}, kde A_i obsahuje ta čísla, jejichž nejmenším prvočinitelem je číslo i. Každá dvě různá čísla z téže množiny A_i jsou soudělná. Nechť množina B trojmístných po dvou nesoudělných čísel má aspoň 12 prvků. Kdyby v B byla pouze složená čísla, podle Dirichletova principu by B obsahovala dvě čísla z téže množiny A_i; tato čísla by ale byla soudělná. Proto množina B musí obsahovat aspoň jedno prvočíslo.

Hledané nejmenší číslo k je tedy 12.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Ukažte, že při zkoumání, zda je dané přirozené číslo N prvočíslo, stačí prověřit jeho dělitelnost prvočísly $p \leqq \sqrt{N}$.
2. Najděte nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li libovolně n různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, jsou mezi nimi dvě taková, jejichž rozdíl je a) 11; b) 13. [a) 56; b) 53]
3. Na večírku je 20 lidí. Dokažte, že jsou mezi nimi dva, kteří mají mezi ostatními účastníky večírku stejný počet přátel (přátelství je symetrické: je-li A přítelem B, potom B je přítelem A).
4. Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li libovolných n přirozených čísel menších než 2 006, jsou mezi nimi dvě taková, že podíl součtu a rozdílu jejich druhých mocnin je větší než 3. [21; 55–B–I–6]

4. *V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB, pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový.*

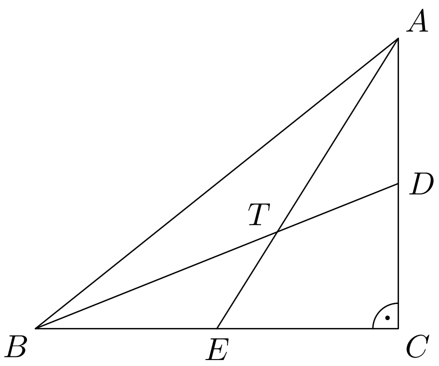
Řešení. Konvexní čtyřúhelník je tečnový, právě když součty délek jeho protilehlých stran jsou stejné.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ (obr. 3). Podle Pythagorovy věty platí

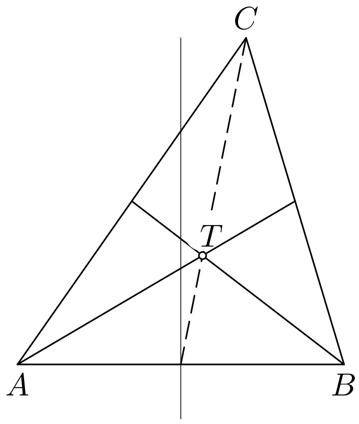
$$|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Protože těžiště trojúhelníku dělí těžnici v poměru 1 : 2, je

$$|TD| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |TE| = \frac{1}{3}|AE| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$



Obr. 3



Obr. 4

Čtyřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když $|CD|+|TE| = |EC|+|TD|$, tedy právě když

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Je-li $a = b$, rovnost zřejmě platí.

Je-li $a > b$, je $a^2+\frac{1}{4}b^2 > b^2+\frac{1}{4}a^2$, takže

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}<\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Podobně je-li $a < b$, je

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}>\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Čtyřúhelník $CDTE$ je tedy tečnový, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Označíme-li běžným způsobem a, b, c strany daného trojúhelníku a t_a, t_b, t_c délky jeho těžnic, bude čtyřúhelník $CDTE$ tečnový, právě když

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}t_b=\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}t_a \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{3}(t_a-t_b). \tag{1}$$

Ukážeme, že uvedená rovnost platí, právě když $a = b$.

V libovolném trojúhelníku ABC totiž platí

$$a<b, \quad \text{právě když} \quad t_a>t_b. \tag{2}$$

To je zřejmé z toho, že těžiště T uvažovaného trojúhelníku leží ve stejné polorovině určené osou strany AB jako vrchol C (obr. 4), přičemž $|TA| = \frac{2}{3}t_a$, $|TB| = \frac{2}{3}t_b$.

Je-li $a = b$, rovnost (1) platí. Naopak je-li např. $a < b$, je podle (1) a (2)

$$0>\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{3}(t_a-t_b)>0,$$

což nelze. Proto $a = b$.

Čtyřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když je (pravoúhlý) trojúhelník ABC rovnoramenný.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový, právě když $|AB|+|CD|=|BC|+$ $+|DA|$.
2. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí $v_a < v_b$, právě když $t_a < t_b$. [Obě nerovnosti jsou ekvivalentní s $a > b$.]
3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC má základna AB délku $c = 4$ a rameno AC délku 7. Vypočítejte délky těžnic. [$t_a = t_b = \frac{9}{2}$, $t_c = \sqrt{45}$]

5. *Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$.*

Řešení. Dělením mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$ mnohočlenem $x^2 + px + q$ zjistíme, že platí

$$x^4+px^2+q=(x^2+px+q)(x^2-px+p^2+p-q)+(2pq-p^3-p^2)x+q-p^2q-pq+q^2.$$

Mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$, právě když je zbytek $(2pq - p^3 - p^2)x + q - p^2q - pq + q^2$ nulový mnohočlen, tedy právě když platí současně

$$2pq - p^3 - p^2 = p(2q - p^2 - p) = 0$$

a

$$q - p^2q - pq + q^2 = q(1 - p^2 - p + q) = 0.$$

Je-li $p = 0$, potom $q = 0$ nebo $q = -1$.

Je-li $q = 0$, potom $p = 0$ nebo $p = -1$.

Je-li $p \neq 0$ i $q \neq 0$, potom musí platit $2q - p^2 - p = 0$ a $1 - p^2 - p + q = 0$. Z druhé rovnice vyjádříme $q = p^2 + p - 1$. Po dosazení do první rovnice máme $2p^2 +$ $+ 2p - 2 - p^2 - p = p^2 + p - 2 = (p + 2)(p - 1) = 0$ a odtud $p = 1$, $q = 1$ nebo $p = -2$, $q = 1$.

Vyhovuje tedy pět dvojic (p, q), a to $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$.

Jiné řešení. Mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$, právě když existují taková reálná čísla a a b, že

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + q &= (x^2 + px + q)(x^2 + ax + b) = \\ &= x^4 + (a + p)x^3 + (b + ap + q)x^2 + (bp + aq)x + bq. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme podmínky

$$a + p = 0, \tag{1}$$

$$b + ap + q = p, \tag{2}$$

$$bp + aq = 0, \tag{3}$$

$$bq = q. \tag{4}$$

Jestliže $q = 0$, potom podle (3) $p = 0$ nebo $b = 0$. Dosazením $b = 0$ do (2) s využitím (1) dostaneme $-p^2 = p$, takže kromě $p = 0$ vyhovuje i $p = -1$.

Jestliže $q \neq 0$, vyplývá ze (4) $b = 1$. Vztahy (3) a (1) potom dávají $p - pq = 0$, tedy $p = 0$ nebo $q = 1$. V prvním případě musí být podle (2) $q = -1$, ve druhém $1 - p^2 + 1 = p$ a odtud $p = 1$ nebo $p = -2$.

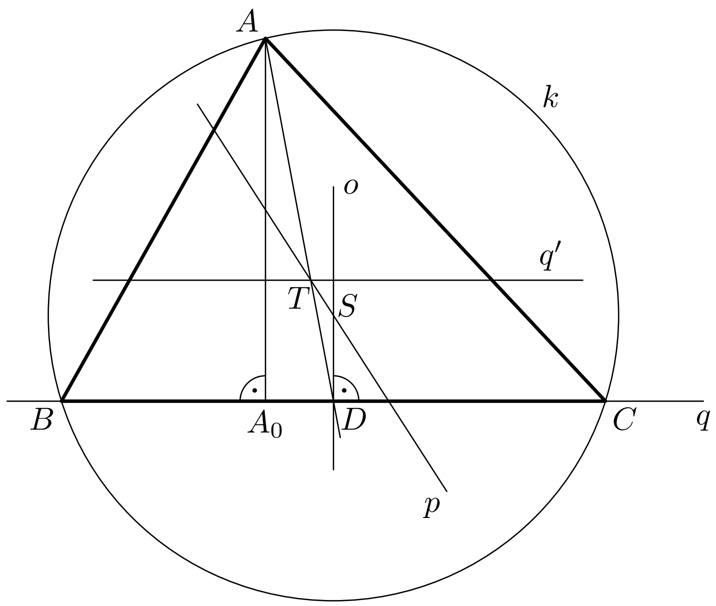
Vyhovuje tedy pět dvojic (p, q), a to $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každé a je mnohočlen $x^4 + (1-a)x^3 + x^2 + a$ dělitelný mnohočlenem $x^2 - ax + a$.
2. Zjistěte, pro kterou hodnotu parametru a je mnohočlen $2x^3 + 4x^2 + 2ax + 9$ dělitelný mnohočlenem $x^2 - x - a$. [$a = -\frac{3}{2}$]
3. Najděte společné kořeny mnohočlenů $x^4 + 2x^3 + x^2 - 9$ a $x^4 - 3x^2 + 4x - 3$. [$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$]

6. *Je dána úsečka AA_0 a přímka p. Sestrojte trojúhelník s vrcholem A a výškou AA_0, jehož těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce p.*

Řešení. Předpokládejme, že ABC je hledaným trojúhelníkem. Jeho strana BC leží na přímce q, která prochází bodem A_0 a je kolmá na úsečku AA_0. Na této přímce leží i střed D strany BC. Těžiště T je obrazem bodu D ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$, leží proto na přímce q', která je obrazem přímky q ve zmíněné stejnolehlosti. Střed S opsané kružnice leží na ose o strany BC čili na přímce, která prochází bodem D a je rovnoběžná s úsečkou AA_0 (obr. 5).



Obr. 5

Konstrukce: Bodem A_0 vedeme přímku q kolmou na úsečku AA_0. Sestrojíme obraz q' přímky q ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$. Označíme T průsečík přímky q' s přímkou p a D průsečík přímky AT s přímkou q. Bodem D vedeme rovnoběžku o s AA_0 a její průsečík s přímkou p označíme S. Průsečíky kružnice k se středem S a poloměrem $|SA|$ s přímkou q jsou vrcholy B a C hledaného trojúhelníku.

Důkaz: Úsečka AA_0 je kolmá na stranu BC, je to tedy výška trojúhelníku ABC. Bod S ležící na přímce p je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Ze shodnosti trojúhelníků BDS a CDS (Ssu) vyplývá, že D je střed strany BC. Proto je AD těžnice a T těžiště trojúhelníku ABC (platí totiž $|AT| = \frac{2}{3}|AD|$).

Diskuse: Není-li přímka p rovnoběžná s úsečkou AA_0 ani na ni kolmá, jsou body T a S jednoznačně určeny. V tom případě má úloha právě jedno řešení (až na označení bodů B a C), pokud kružnice k protíná přímku q ve dvou různých bodech; neprotíná-li k přímku p ve dvou různých bodech, nemá úloha řešení.

Je-li úsečka AA_0 částí přímky p, není bod S jednoznačně určen; vyhovují všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou BC, která má střed v bodě A_0. Je-li úsečka AA_0 rovnoběžná s přímkou p, ale neleží na ní, nemá úloha řešení.

Je-li přímka p kolmá na úsečku AA_0, má úloha řešení pouze tehdy, jsou-li přímky q' a p totožné. To nastane, jestliže přímka p protíná úsečku AA_0 v bodě V, pro nějž platí $|AV| = 2|A_0V|$. V takovém případě můžeme bod T zvolit na p kdekoliv a úloha má nekonečně mnoho řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že v každém nerovnostranném trojúhelníku leží ortocentrum V, těžiště T a střed S opsané kružnice na jedné přímce, přičemž T leží mezi V a S a platí $|TV| = 2|ST|$. (Přímka, na níž leží body S, T a V, se nazývá *Eulerova přímka.*)
2. Jsou dány body A, D a V. Sestrojte trojúhelník ABC, v němž D je střed strany BC a V průsečík výšek.