55. ročník matematické olympiády

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Najděte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že součet $a+b$ je kořenem rovnice $x^2+ax+b=0$.

2. Posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje pro každé $n \geqq 1$ rovnost

$$\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{a_{n+3}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}$$

a navíc platí $a_{11}=4$, $a_{22}=2$, $a_{33}=1$. Dokažte, že pro každé přirozené číslo k je součet

$$a_1^k+a_2^k+\ldots+a_{100}^k$$

druhou mocninou přirozeného čísla.

3. Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP.

4. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sin^2 x+\cos^2 y=y^2,$$
$$\sin^2 y+\cos^2 x=x^2.$$

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 24. ledna 2006

tak, aby začalo dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby, školní MF tabulky a kalkulátory bez grafického displeje. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

1. Hledáme celá čísla a, b, pro která $(a+b)^2+a(a+b)+b=0$, což je pro neznámou b kvadratická rovnice $b^2+(3a+1)b+2a^2=0$ s celočíselnými koeficienty. Ta má celočíselný kořen, jedině když je její diskriminant

$$D=(3a+1)^2-4\cdot 2a^2=(a+3)^2-8$$

úplný čtverec. Ten je přitom o osm menší než jiný úplný čtverec $(a+3)^2$. Jak snadno zjistíme (rozdíly druhých mocnin dvou sousedních přirozených čísel postupně rostou), rozdíl 8 mají pouze úplné čtverce 9 a 1, takže $(a+3)^2=9$, odkud plyne $a=-6$ nebo $a=0$. Pro $a=-6$ vychází $b=8$ a $b=9$, pro $a=0$ vychází $b=0$ a $b=-1$. Dostáváme tak čtyři řešení: (a,b) je jedna z dvojic $(-6,8)$, $(-6,9)$, $(0,0)$, $(0,-1)$.

Poznámky. Zvolíme-li za neznámou a místo b, vyjde rovnice $2a^2+3ba+(b^2+b)=0$ s diskriminantem $D'=9b^2-8\cdot(b^2+b)=(b-4)^2-16$; úplné čtverce lišící se o 16 jsou pouze 0, 16 a 9, 25.

Úlohu nalézt dva úplné čtverce x^2 a y^2 s daným rozdílem d lze pro malé hodnoty d (jako $d=8$ či $d=16$ v naší úloze) vyřešit otestováním několika prvních čtverců 0, 1, 4, 9, … Pro jakékoli přirozené d lze postupovat tak, že rovnici $x^2-y^2=d$ upravíme na $(x-y)(x+y)=d$ a vypíšeme všechny rozklady daného čísla d na součin d_1d_2 dvou celočíselných činitelů; z rovnic $d_1=x-y$, $d_2=x+y$ pak vypočteme příslušná x a y.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za takové považujte i řešení, ve kterém jsou úplné čtverce lišící se o 8 či 16 vypsány (uhodnuty) bez vysvětlení, proč jiné takové čtverce neexistují. Za nalezení řešení pouze pro $a=0$ (např. chybnou úvahou, že číslo $a+b$ dělí číslo b jedině pro $a=0$) udělte 1 bod. Za uhodnutí všech čtyř řešení (např. experimentováním s malými čísly a, b) udělte 2 body.

2. Nejdříve dokážeme, že pro členy zkoumané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: rovnost $a_n=0$ je splněna pro některé přirozené n, právě když pro totéž n platí $a_{n+3}=0$. Skutečně, je-li $a_n=0$, pak jmenovatelé zlomků v zadané rovnosti jsou navzájem opačná (nenulová) čísla, takže takoví musí být i jejich čitatelé. Z rovnosti

$$a_{n+3}-a_{n+2}=-(a_{n+3}+a_{n+2})$$

už plyne $a_{n+3}=0$. Obráceně, platí-li $a_{n+3}=0$, jsou čitatelé zmíněných zlomků navzájem opačná čísla, takže takoví musí být i jejich jmenovatelé, odkud $a_n=0$.

Dokázaná vlastnost má tento důsledek: z podmínky $a_{33}\neq 0$ plyne $a_{3k}\neq 0$ (pro každé $k\geqq 1$), z $a_{22}\neq 0$ plyne $a_{3k+1}\neq 0$ a z $a_{11}\neq 0$ plyne $a_{3k+2}\neq 0$ (vždy pro každé $k\geqq 0$). Dohromady vychází, že *žádný člen a_n zkoumané posloupnosti není roven nule.*

Z rovnosti ze zadání plyne rovnost

$$(a_{n+3}-a_{n+2})(a_n+a_{n+1})=(a_{n+3}+a_{n+2})(a_n-a_{n+1}),$$

z níž po roznásobení a následném zjednodušení dostaneme (pro libovolné přirozené n)

$$a_{n+1}a_{n+3}=a_na_{n+2}.$$

Zvětšíme-li n o 1, dostaneme analogický vztah, který platí pro libovolné nezáporné celé n:

$$a_{n+2}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+3}.$$

Vynásobíme-li obě rovnosti a výsledek zkrátíme (nenulovým!) číslem $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$, vyjde $a_{n+4} = a_n$, tj. daná posloupnost má periodu 4. Proto $a_1 = a_{33} = 1$, $a_2 = a_{22} = 2$, $a_3 = a_{11} = 4$, $a_4 = a_1a_3/a_2 = 2$, tudíž

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{100}^k = 25(1^k + 2^k + 4^k + 2^k) = \bigl(5(1 + 2^k)\bigr)^2.$$

Tím je důkaz hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. 2 body udělte za odvození důležité podmínky, že $a_n \neq 0$ pro všechna n, tj. řešení, v němž se dělí číslem $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$ bez ověření jeho nenulovosti, oceňte pouhými 4 body, z toho 1 bod za konečnou úpravu součtu k-tých mocnin do tvaru druhé mocniny.

3. Dané čtyři body A, B, X, Y leží na kružnici (obr.), právě když

$$|PA| \cdot |PX| = |PB| \cdot |PY|.$$

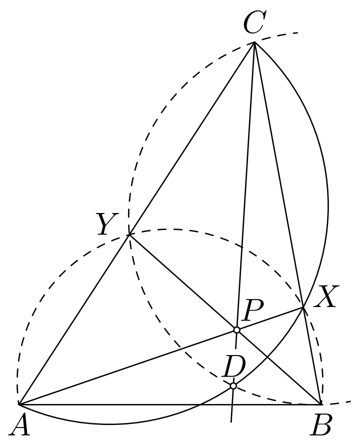
Kružnice opsaná trojúhelníku ACX protne polopřímku opačnou k polopřímce PC v bodě, který označíme D. Pro tento bod platí

$$|PA| \cdot |PX| = |PC| \cdot |PD|.$$

Rovnost z první věty řešení tedy nastane, právě když platí

$$|PB| \cdot |PY| = |PC| \cdot |PD|.$$

Tato rovnost je splněna, právě když bod D leží na kružnici opsané trojúhelníku BCY, tedy právě když je bod $D \neq C$ druhým průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY. Důkaz je hotov.



Poznámky. Úlohu je možné ihned vyřešit na základě poznatku o tom, jak vypadá množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím. Je to vždy přímka (zvaná chordála), jež je kolmá ke středné obou kružnic a prochází jejich společnými body (pokud existují). Rovnost z první věty řešení proto vyjadřuje právě to, že bod P leží na chordále kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz pouze jedné z obou implikací udělte tři body.

4. Předně si uvědomme, že s každým reálným řešením (x, y) dané soustavy rovnic jsou jejími řešeními také dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$ a $(-x, -y)$, Stačí se proto omezit na řešení v oboru nezáporných reálných čísel. Navíc s každým řešením (x, y) je řešením dané soustavy i dvojice (y, x). Můžeme proto dále předpokládat, že $0 \leqq x \leqq y$.

Přepišme nejprve obě rovnice soustavy pomocí téhož známého vzorce $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + 1 - \sin^2 y &= y^2, \\ \sin^2 y + 1 - \sin^2 x &= x^2. \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic pak dostaneme

$$x^2 + y^2 = 2. \tag{1}$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme

$$2 \sin^2 x - 2 \sin^2 y = y^2 - x^2,$$

neboli

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = y^2 - x^2. \tag{2}$$

Za uvedeného předpokladu $0 \leqq x \leqq y$ ze vztahu (1) navíc plyne, že $0 \leqq x \leqq y \leqq \sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi$, a protože funkce sinus je v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi)$ nezáporná a rostoucí, vidíme, že pro taková reálná čísla x a y je levá strana rovnice (2) nekladná, zatímco pravá strana je nezáporná. To znamená, že musí být $y^2 - x^2 = 0$, což za uvedených předpokladů dává $x = y$ a spolu s (1) tak máme $x = y = 1$.

V oboru nezáporných reálných čísel má daná soustava rovnic jediné řešení, a to $(x, y) = (1, 1)$.

Závěr. Daná soustava rovnic má právě čtyři řešení v oboru reálných čísel. Jsou jimi následující dvojice: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zjištění rovnosti $x^2 + y^2 = 2$ bez dalšího podstatného pokroku udělte 1 bod. Za uhodnutí všech řešení (např. v důsledku chybné úvahy, že z pouhé symetrie soustavy okamžitě plyne rovnost $x = y$) udělte 1 bod. Zmínku o symetrii neznámých x, y či možnosti měnit u jejich hodnot libovolně znaménka oceňte 1 bodem. Zmíněné dílčí jednobodové zisky nelze kumulovat sčítáním. Pokud student vyřeší úlohu jen v některém kvadrantu, aniž by našel řešení i v ostatních kvadrantech, udělte 4 body.